COURS

DE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES,

LEVÉ DE PLANS, ARPENTAGE, NIVELLEMENT,

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

A L'USAGE

DES LYCÉES ET DES COLLÈGES,

ET DE TOUS LES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION PUBLIQUE;

PAR A. GUILMIN,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS.

AUGUSTE DURAND, LIBRAIRE,

Rue des Grès, 7.

1861



COURS

DE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

AVIS.

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et Ce, 26, rue Racine, près de l'Odéon.

COURS

DE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES,

LEVÉ DE PLANS, ARPENTAGE, NIVELLEMENT,

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE,

A L'USAGE

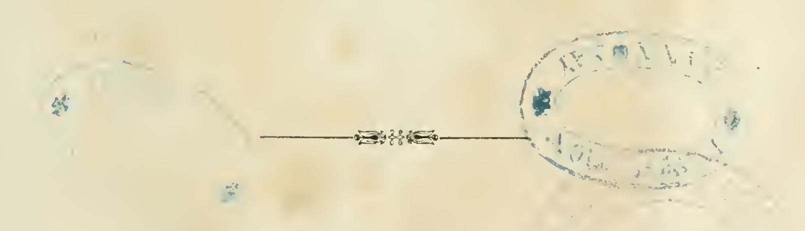
DES LYCÉES ET DES COLLÉGES,

ET DE TOUS LES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION PUBLIQUE;

PAR A. GUILMIN,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME ÉDITION.



PARIS.

AUGUSTE DURAND, LIBRAIRE,

Rue des Grès, 7.

1861

COURS

DE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

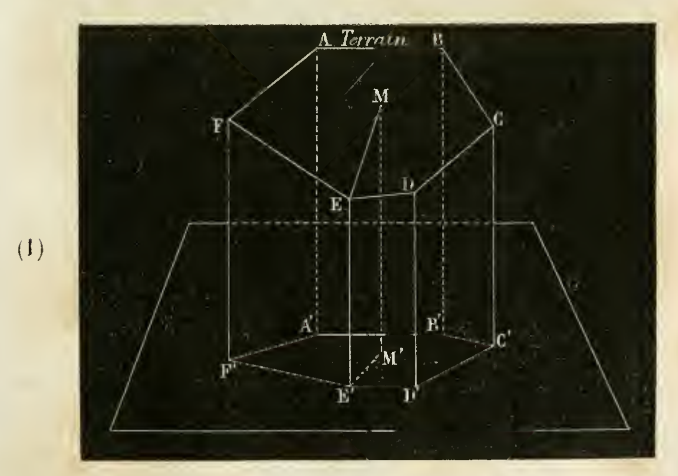
LEVÉ DES PLANS.

PRÉLIMINAIRES.

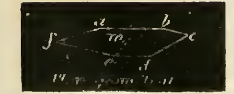
1. Lever le plan d'un terrain horizontal, c'est tracer en petit sur le papier une figure semblable à celles que forment le contour du terrain, et les autres lignes et points remarquables qu'il renferme.

2. Si le terrain n'est pas horizontal, ce n'est pas précisément

(1)



(2)



la figure du terrain qu'on représente sur le papier, c'est celle de sa projection horizontale. C'est-à-dire qu'on

construit dans ce cas une figure semblable à celle que déterminent les pieds des perpendiculaires abaissées des points du contour et des autres points remarquables du terrain sur un même plan horizontal. La figure ainsi obtenue est ce qu'on appelle le plan *géométral* du terrain.

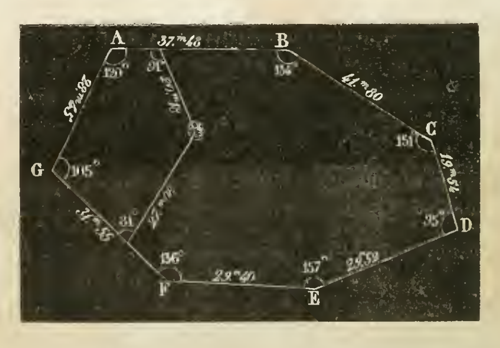
3. Nous ne considérerons pour le moment que le premier cas, celui où le terrain est horizontal, ou bien tel que les longueurs et les angles peuvent y être sans difficulté mesurés horizontalement.

Le second cas sera traité plus tard (*V.* le nivellement).

4. PRINCIPES DU LEVÉ DES PLANS.

La construction du plan d'un terrain nécessite deux séries d'opérations distinctes :

1° *Levé du plan.* On mesure directement sur le terrain les lignes et les angles qui déterminent la figure que l'on veut représenter (*),



en ayant soin d'inscrire les nombres trouvés sur un croquis de cette figure fait à main levée, ou sur un plan minute exécuté sur place. Cela s'appelle *lever le plan.*

2° *Construction du plan.* On réduit toutes les longueurs trouvées dans un même rapport, qu'on appelle l'échelle de réduction du plan (n° 25); puis on construit avec soin sur le papier, avec les longueurs réduites et les angles trouvés, une figure semblable à celle du terrain, de la même manière qu'on construirait une figure égale avec les longueurs mesurées elles-mêmes (*fig.* (2) ci-après). Cela s'appelle *rapporter le plan.*

5. Il y a donc autant de manières de lever un plan, qu'il y a de

(*) C'est-à-dire qui serviraient à faire une figure égale.

manières de construire une figure égale à une figure donnée. Nous allons donner une idée des méthodes usitées.

Ces méthodes ont pour objet de résoudre les deux questions élémentaires suivantes :

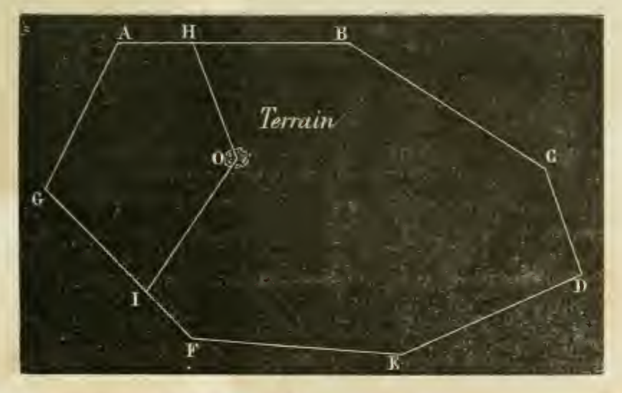
1° *Lever le plan d'un contour polygonal fermé ou non.*

2° *Relever un point ou un nombre quelconque de points en les rattachant à une droite du terrain préalablement rapportée sur le plan.*

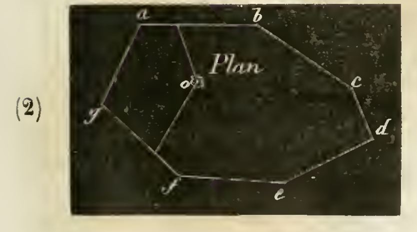
Il suffit de savoir résoudre ces deux questions pour savoir lever un plan quelconque ; on pourrait même à la rigueur se borner à la seconde. En effet, toute figure se compose de points isolés et de lignes droites ou courbes. Pour rapporter une droite du terrain sur le plan, il suffit de rapporter ses deux extrémités. On considère une ligne courbe comme composée d'un grand nombre de petites lignes droites, et on relève un certain nombre de ses points suffisamment rapprochés. Pour savoir lever un plan il suffit donc de savoir relever un à un autant de points que l'on veut.

6. 1° Méthode par cheminement. Cette méthode s'emploie pour

(1)



(2)



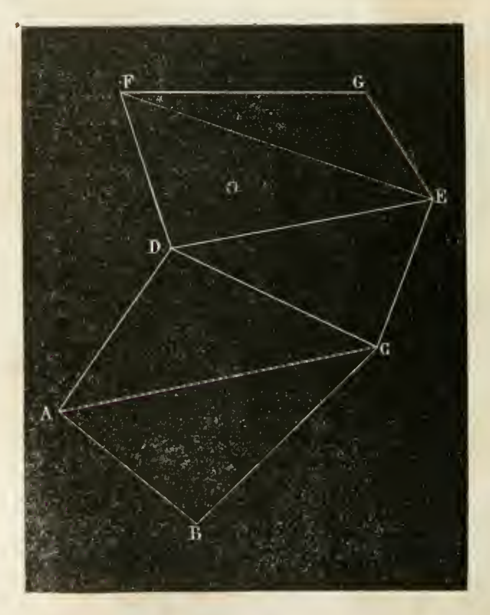
lever le plan d'une ligne brisée de forme quelconque, que l'on peut parcourir et mesurer sans difficulté.

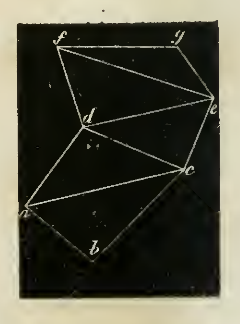
Levé du plan. On mesure successivement sur le terrain les côtés AB, BC,... GA et les angles B, C, D,... G;

Construction du plan. On réduit toutes les longueurs AB, BC, etc. dans le même rapport ; soient *ab*, *bc*, etc., ces longueurs réduites. On trace sur le papier une ligne égale à *ab* ; on fait l'angle *abc* = ABC et on prend le second côté égal à *bc*. On fait l'angle *bcd* = BCD, et on prend le nouveau côté égal à *cd*. Ainsi de suite jusqu'au côté *fg*. La figure ainsi obtenue est (par définition) semblable à celle du terrain.

Pour rattacher un point isolé O du terrain, à une ligne polygonale ainsi conduite, on le joint à l'un des sommets, ou à un point H du contour. On mesure la longueur HO et l'angle AHO. On fait sur le papier l'angle *aho* = AHO, et on prend *ho* égale à HO réduite à l'échelle adoptée. Le point *o* représente O.

7. 2° Triangulation. On décompose la surface du terrain en





un certain nombre de triangles par des lignes intérieures.

Levé du plan. On mesure un côté AB de l'un de ces triangles et les angles adjacents BAC, ABC. On mesure les angles ACD, CAD d'un second triangle ACD adjacent au premier ; puis les angles DCE, CDE d'un troisième triangle adjacent à l'un des premiers ; etc.

Construction du plan. On trace sur le papier une ligne *ab* égale

à AB, réduite à l'échelle. On construit le triangle *abc* semblable à ABC, puis le triangle *acd* semblable à ACD, etc.

8. 3° Méthode par rayonnement.

Levé du plan. On choisit un point O intérieur au terrain ; on joint ce point à tous les points A, B, C, ..., M que l'on veut relever (faites la figure) (*V.* le levé à la planchette). On mesure les lignes OA, OB, OC, ..., OM et les angles consécutifs AOB, BOC, ..., AOM.

Construction du plan. On choisit un point *o* du papier pour représenter O du terrain. On y construit dans le même ordre que sur le terrain des angles *aob, boc, ..., aom,* respectivement égaux à AOB, AOC, ..., AOM, et on prend sur les côtés des longueurs *oa, ob, oc, ..., om,* égales à OA, OB, OC, ..., OM, réduites à l'échelle. Enfin on joint les points *a, b, c, ..., m* entre eux de la même manière qu'ils sont joints sur le terrain.

Au lieu d'un point intérieur O, les rayons peuvent partir d'un point du contour ; la construction est toujours la même.

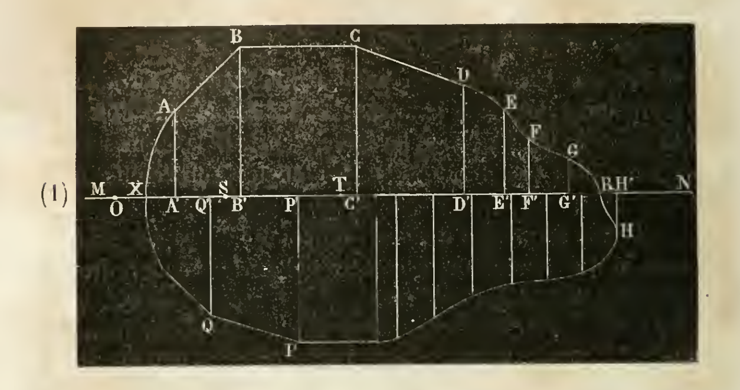
9. Emploi des bases. Les méthodes précédentes qui résolvent la 1re question conviennent peu quand il faut relever des lignes courbes ou très-sinueuses. On envisage alors la question au second point de vue (n° 5, 2°), c'est-à-dire qu'on relève chaque point isolément, en déterminant sa position par rapport à une droite déjà représentée ou que l'on représente sur le plan ; cette droite est ce qu'on appelle *une base.*

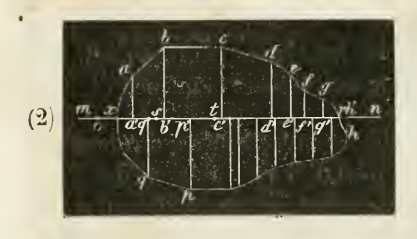
10. 4° Méthode des perpendiculaires.

Levé du plan. Des points A, B, C, ... du terrain qu'on veut marquer sur le plan, on abaisse des perpendiculaires AA', BB', CC',... sur une base MN déjà représentée ou qu'on représente sur le plan, (*fig.* 1). On mesure ces perpendiculaires AA', BB', CC', et les distances OA', OB', OC', ... (O est un point de MN choisi pour origine des distances comptées sur cette ligne).

Construction du plan. On réduit dans le même rapport toutes les longueurs mesurées AA', BB', ... OA', OB', ... Soient *aa', bb',... oa', ob',* etc., ces longueurs réduites. On trace une ligne *mn* pour représenter MN (si elle n'est pas déjà représentée). (*fig.* 2). On prend

consécutivement sur *mn* à partir du point *o* (représentant O) les



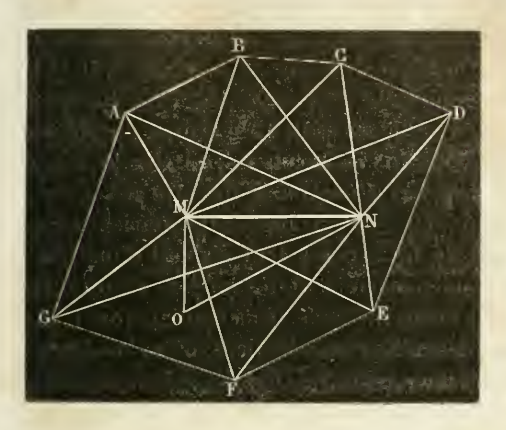


longueurs $a'o$, ob', ... Aux points a', b',... on élève des perpendiculaires à *mn* que l'on prend égales à $a'a$, $b'b$, etc. Enfin, on joint les extrémités *a*, *b*, ... de la même manière que les points A, B, ... sont joints sur le terrain. On obtient ainsi une figure semblable à la figure du terrain; car ces deux figures ont les angles égaux chacun à chacun, et les côtés proportionnels et semblablement disposés (*).

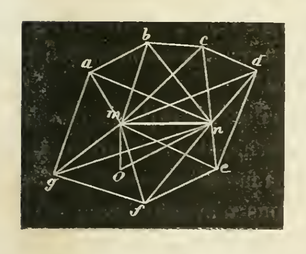
(*) Démonstration. Supposons que l'échelle de réduction, c'est-à-dire le rapport $\frac{aa'}{AA'} = 0{,}001$. Imaginons les diagonales AB', ab'; les triangles AA'B', $aa'b$ qui ont un angle égal compris entre côtés proportionnels sont semblables. On conclut de là aisément la similitude des triangles AB'B, $ab'b$; le rapport de deux lignes homologues *quelconques* ab, AB est donc égal à 0,001; les lignes homologues des deux figures sont donc proportionnelles. Les angles homologues sont égaux; par ex. : ABC $= abc$; en effet, on peut tracer les lignes AC, ac, si elles ne sont pas déjà menées; les triangles ABC, abc ont leurs côtés proportionnels et sont semblables; donc, l'angle ABC $= abc$. Il est évident que les lignes homologues sont semblablement disposées.

11. 5° MÉTHODE DES INTERSECTIONS.

Levé du plan ABCDEFGO. On choisit sur le terrain une base MN que l'on mesure avec soin. On mesure au point M les angles AMN, BMN, etc., puis au point N les angles ANM, BNM, etc.



Construction du plan. On trace sur le plan une ligne *mn* égale MN réduite dans un rapport convenable. (Il peut arriver que MN soit déjà représentée.) Puis on fait en *m* les angles *amn*, *bmn*, etc., égaux à AMN, BMN, etc.; puis en *n* les angles *anm*, *bnm*, etc., égaux à ANM, BNM, etc. Cela fait, on marque le point de rencontre *a* des lignes *ma*, *na*, correspondant au point A, le point de rencontre *b* de celles qui correspondent au point B, etc.; les points *a*, *b*,... *o* représentent A, B,... O. Enfin on joint ces points *a*, *b*, *c*,... de la même manière que leurs homologues A, B, C,... sont joints sur le terrain. On obtient ainsi une figure semblable à celle du terrain; car les deux figures ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels (*).



(*) Supposons que l'échelle de réduction soit 0,001. Les triangles MAN, *man* sont équiangles et semblables; de même les triangles MBN, *mbn*. On conclut de là que les rapports $\frac{am}{AM}$, $\frac{bm}{BM}$ sont égaux à $\frac{mn}{MN} = 0{,}001$; de plus, l'angle AMB $=$ *amb*; les deux triangles ABM, *abm* sont donc semblables, et $\frac{ab}{AB} = \frac{am}{AM}$. Le rapport de deux lignes homologues *quelconques ab*, AB est donc 0,001; les lignes homologues sont proportionnelles. On en conclut comme pour l'autre

12. *Autrement;* pour rattacher chaque point A du terrain à la base MN, on peut, au lieu des angles AMN, ANM, mesurer les longueurs MA, NA (fig. précédente); soient *ma, na,* ces longueurs réduites. Sur *mn* avec les côtés *ma, na,* on construit le triangle *amn;* le point *a* représente A. On relève de même les points B, C, D, etc.

13. Autrement; on mesure MA et l'angle AMN. On construit l'angle *amn* = AMN, et on prend *ma* égale à MA réduite; le point *a* représente A. On relève de même les points B, C, D, etc.

14. Telles sont les *méthodes élémentaires* du levé des plans. Elles en constituent les principes; c'est pourquoi il convient selon nous de les détacher et de les exposer tout d'abord d'une manière nette et précise, indépendamment des moyens d'exécution qui peuvent varier pour la même méthode. Nous appliquerons bientôt ces méthodes au levé des plans considéré dans toutes les circonstances qui peuvent se présenter; mais avant de faire cette application, il nous faut étudier en particulier les opérations qu'elle nécessite, et les instruments nécessaires pour effectuer ces opérations.

15. D'après ce qui précède, ces opérations sont de deux sortes.

Opérations sur le terrain. Tracer et mesurer des droites. Mener des perpendiculaires et mesurer des angles.

Opérations graphiques. Tracer sur le papier des droites de grandeurs données, mener des perpendiculaires et construire des angles donnés.

Les opérations graphiques nous sont déjà familières ainsi que les instruments qui servent à les effectuer. Nous n'avons donc à étudier que les opérations à effectuer sur le terrain et les instruments employés à cet effet.

TRACÉ ET MESURE DES DROITES SUR LE TERRAIN.

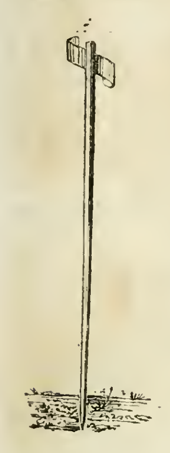
16. Des jalons. Pour tracer une droite sur le terrain, on se sert de jalons. On appelle ainsi des baguettes de bois léger et bien ébranchées (en coudrier, bourdaine, saule, osier, etc.), ayant environ un mètre et demi de long, et 2 à 3 centimètres de grosseur au milieu; ils servent à déterminer les alignements (*).

---

méthode que deux angles homologues quelconques ABC, *abc* sont égaux. Il est évident que les lignes homologues sont semblablement disposées.

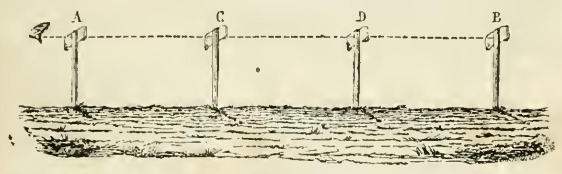
(*) Pour plus de précision, il convient que les jalons soient taillés en forme de prismes de la longueur indiquée; alors on vise un jalon suivant une de ses arêtes.

L'extrémité inférieure qu'on enfonce en terre est ferrée et pointue; l'autre est fendue et reçoit un morceau de papier ou une carte, qui sert de mire. Les jalons doivent être placés bien verticalement (au moyen du fil à plomb).



17. Tracé d'une droite. *Prendre un alignement ou tracer une droite* sur le terrain, c'est marquer par des jalons un certain nombre de points de cette ligne. Quand la distance est peu considérable, on plante simplement un jalon à chaque extrémité. Mais si la distance est assez grande, ayant placé des jalons ou des signaux quelconques aux deux extrémités, on plante des jalons entre ces signaux, en procédant comme il suit :

Le géomètre se place à quelques pas en arrière du jalon A de manière que ce jalon, visé dans la direction AB, lui cache le



jalon B (*). Un aide, qui marche de A vers B, plante de distance en distance sur son chemin des jalons C, D de manière que le géomètre, visant toujours comme nous l'avons dit dans la direction AB, ne voie ces jalons ni à droite, ni à gauche de cette ligne. Tous les jalons C, D, B doivent lui être cachés par le jalon A.

Si la ligne à jalonner est très-longue et qu'on veuille opérer avec précision, on se sert d'une lunette dirigée de A vers B; on plante les jalons dans le plan vertical déterminé par l'axe optique de la lunette.

De quelque manière qu'on opère, il faut employer un assez

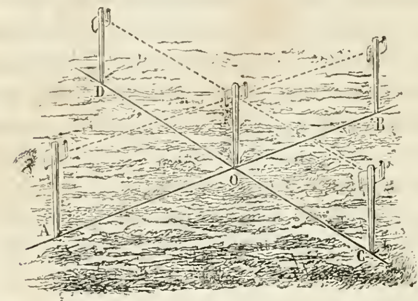
(*) On place quelquefois à l'extrémité B un *voyant*, c'est-à-dire un rectangle en fer-blanc dont les deux moitiés sont de couleurs différentes, et qui peut glisser dans une règle plantée verticalement. Les voyants sont employés à défaut de signaux naturels.

grand nombre de jalons pour que l'alignement soit indiqué avec une précision suffisante.

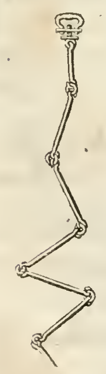
18. *Prolonger une droite* AB. L'arpenteur recule à partir de B, à peu près suivant l'alignement qu'il veut tracer; arrivé à une certaine distance, il place un jalon C de manière que ce jalon lui cache à la fois les signaux B et A. Puis, continuant à reculer, il plante un nouveau jalon D qui lui cache à la fois C, B, A; et ainsi de suite.

Nous verrons plus loin comment on prolonge une droite au delà d'un obstacle.

19. *Marquer le point de rencontre de deux droites jalonnées* AB, CD. L'arpenteur se place derrière le jalon A et vise dans la direction AB (n° 17); l'aide marche dans la direction CD, jusqu'à ce que, arrivé sur la ligne AB, il soit caché à l'arpenteur par le jalon A. Il est alors au point de rencontre O, qu'il marque avec précision par un jalon qui doit être caché à l'arpenteur par le jalon A.



20. De la chaîne. *La chaîne d'arpenteur* est un instrument qui sert à mesurer sur le terrain les distances un peu considérables. Elle est ordinairement composée de cinquante chaînons ou tiges en gros fil de fer, bouclés à leurs extrémités et réunis par des anneaux. La distance comprise entre les centres de deux anneaux consécutifs est égale à deux décimètres, de sorte que la longueur totale de la chaîne, en y comprenant deux poignées de fer qui la terminent, est de dix mètres (*). Les anneaux sont en fer, excepté ceux qui indiquent les mètres de cinq en cinq, que l'on fait en laiton.



(*) Chaque poignée et le chaînon adjacent (plus court que les autres) forment

L'anneau du milieu porte de plus, comme marque distinctive, un petit appendice en métal.

21. Remarque. A chaque opération, on exerce sur la chaîne, pour la tendre, un effort qui doit bientôt l'allonger; il est donc nécessaire, dans les opérations qui exigent une grande exactitude, de vérifier la chaîne sur une longueur préalablement préparée avec soin pour servir d'étalon. On tient compte de l'allongement.

22. Mesurer une droite AB. L'arpenteur fait cette opération avec un aide ou porte-chaîne. L'arpenteur appuie l'une des poignées de la chaîne *extérieurement* contre le jalon placé à l'extrémité A de la ligne. L'aide, ayant dans la main droite l'autre poignée de la chaîne, et dans la gauche dix fiches ou pointes en fer, marche de A vers B, tendant la chaîne dans l'alignement déterminé par les jalons; cela fait, il plante une première fiche, en l'appuyant *intérieurement* contre la poignée de la chaîne. Puis l'arpenteur et son aide vont en avant, du même pas, en soulevant la chaîne, jusqu'à ce que le premier soit arrivé à la fiche plantée par le second. Il s'y arrête et applique sa poignée contre cette fiche, pendant que l'aide, ayant tendu de nouveau la chaîne, place une deuxième fiche; ainsi de suite. L'arpenteur ramasse chaque fois la fiche à laquelle il vient de s'arrêter; quand il a les dix fiches en main, il les rend à son aide, et marque sur son carnet une *portée* de 100 mètres. Quelquefois on remplace chaque dixième fiche par un piquet qui reste jusqu'à la fin de l'opération.

Ordinairement une distance se compose d'un certain nombre de longueurs de chaîne, plus une fraction de cette longueur. Pour mesurer cette fraction on emploie les chaînons, et ensuite un mètre divisé.

23. Remarques. Quand l'opération qui nous occupe a pour objet de mesurer sur le terrain même la distance absolue de deux points A, B, la chaîne doit être tendue, suivant l'alignement, parallèlement au terrain dont elle suit fidèlement la pente.

à eux deux un double décimètre. On donne d'ailleurs à la chaîne quelques millimètres de plus, afin de compenser l'erreur produite par le défaut de tension absolue.

Mais s'il s'agit d'une longueur à rapporter sur le papier dans la construction du plan du terrain, la chaîne doit toujours être tendue horizontalement entre un premier point de l'alignement et la verticale d'un second point.

Quoi qu'on fasse en pareil cas pour tendre la chaîne en ligne droite, elle prend toujours une courbure un peu prononcée. C'est pourquoi, quand la pente est régulière, il vaut mieux mesurer la longueur suivant la pente, sauf à réduire ensuite cette longueur à l'horizon.

24. Roulette. Quand on veut lever le plan d'une maison, d'un appartement, d'une cour, d'un jardin, d'un terrain de peu d'étendue, on se sert avec avantage d'un ruban de 5 mètres ou de 10 mètres, divisé en centimètres et millimètres, qui s'enroule sur l'axe d'une boîte en cuir bouilli, de forme cylindrique. Cet instrument, nommé *roulette*, est commode pour mesurer la longueur d'un mur, la largeur d'une porte, d'une cheminée, etc.

RÉDUCTION DES LONGUEURS. ÉCHELLES.

25. Quelle que soit la méthode employée pour lever un plan, toutes les longueurs mesurées sur le terrain doivent être réduites dans un même rapport. Ce rapport est ce qu'on appelle *l'échelle de réduction* du plan.

26. Échelles de réduction. Ainsi on appelle *échelle de réduction d'un plan*, le rapport constant qui existe entre la distance de deux points quelconques du plan et celle des points homologues du terrain. Exemple : si une distance de 1000 mètres est représentée par un décimètre, le plan est construit à l'échelle de $\frac{1}{10000}$.

Le rapport est ordinairement de 1 à 100, à 500, à 1000, à 2500, à 5000, à 10000; le dénominateur ne renferme pas, en général, d'autres facteurs premiers que 2 et 5. La grande carte de France du dépôt de la guerre est à l'échelle de $\frac{1}{80000}$. Pour le cadastre, on fait généralement usage de l'échelle de 1 à 2500; pour les plans de détail des forêts, des masses étendues, et des pays à grande

culture, on emploie l'échelle de 1 à 5000. Dans les levés de petites étendues, il est avantageux d'adopter l'échelle de 0,01 ou de 0,001, afin de pouvoir se servir du mètre divisé en centimètres et en millimètres, dont l'usage est si général et si commode.

Pour choisir l'échelle on a égard à l'étendue du terrain comparée à celle du papier, à la nature des détails qu'on veut reproduire avec netteté en plus ou moins grand nombre. Le plan doit quelquefois servir à déterminer avec *plus ou moins de précision* la distance de deux points quelconques, ou la superficie réelle de telle ou telle portion de terrain.

27. L'échelle de réduction une fois choisie, pour trouver la longueur qui doit représenter sur le plan une longueur mesurée sur le terrain, et réciproquement, on peut se servir d'un double décimètre divisé en centimètres, millimètres et demi-millimètres.

On réduit les longueurs mesurées sur les terrains en les multipliant par l'échelle, c'est-à-dire par 0,01 ou 0,001, etc. Puis on porte les longueurs trouvées sur les lignes homologues du plan à l'aide du double décimètre.

28. Échelle du plan. Au lieu d'une règle divisée, il est plus avantageux de se servir d'une droite divisée *qu'on trouve généralement au bas de chaque plan*. Les divisions de cette droite, qui porte le nom *d'échelle du plan*, représentent généralement 1 mètre, 10 mètres, 100 mètres, 1000 mètres, etc. Supposons, par exemple, que l'échelle de réduction soit 0,001; un mètre du terrain sera représenté par un millimètre. On trace une ligne CAB de 11 centimètres, que l'on divise en onze parties égales; on subdivise

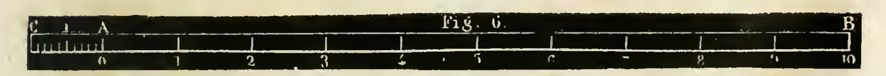


Fig. 6.

la première division à gauche, AC, en dix parties égales qui sont des millimètres. Chaque division de AB représente 10 mètres; chaque division de AC représente 1 mètre. Pour représenter sur le plan une longueur de 65 mètres, on compte six divisions à droite du 0, et cinq à gauche; l'ensemble de ces divisions représente la longueur de 65 mètres *réduite à l'échelle*.

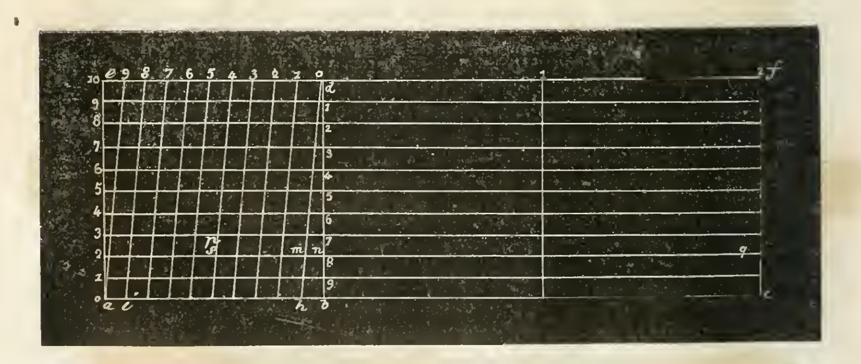
2e *Exemple*. Supposons que l'échelle de réduction soit 0,0075.

Un mètre doit être représenté par $0^{m},0075$ ou 0,75 de centimètre. On prend une longueur AB de $7^{centim.},5$ (dix fois plus grande) qu'on divise en 10 parties égales; on prend à gauche une partie AC de plus qu'on subdivise en 10 parties égales. On prolonge, si on veut, CAB d'une fois, deux fois 7 centimètres et demi, et l'échelle est construite. Chaque partie de AC représente $0^{m},1$ et chaque partie de AB, 1 mètre.

Il n'est pas nécessaire que la longueur de l'échelle corresponde à la plus grande dimension du terrain; car on peut porter plusieurs fois la même longueur dans la direction d'une même droite du plan.

Remarque. Chaque plan est généralement accompagné d'une échelle ainsi tracée, soit au bas, soit dans l'un des coins du papier. Si cette précaution n'a pas été prise pour un plan que l'on possède, il est facile d'y rémedier. Il suffit de connaître la longueur d'une seule ligne du terrain; on mesure avec le double décimètre son homologue du plan. On prend le rapport de cette dernière ligne à la première; supposons que ce soit 0,001. On se sert de ce rapport pour construire l'échelle du plan comme nous venons de l'expliquer.

29. *Échelle décimale proprement dite.* Nous allons encore indiquer une échelle d'un autre genre, un peu plus compliquée,



mais néanmoins fort employée, et connue sous le nom d'échelle *décimale*.

Pour la construire, on trace d'abord onze parallèles *ef*,..... *ac*,

équidistantes (leur distance est arbitraire). On prend sur *ac*, à partir de *a*, une longueur *ai* qui dépend de l'échelle de réduction adoptée pour le plan. Si l'échelle est, par exemple, $\frac{1}{5000}$, et qu'on désire être à même d'évaluer les longueurs, d'après le plan, à moins de 1 mètre, on prend *ai* égal à la longueur qui, à l'échelle de $\frac{1}{5000}$, doit représenter 10 mètres; $\frac{10^m}{5000} = \frac{20^m}{10000} = 0^m,002$. Ayant pris sur *ac* une première longueur *ai* de 2 millimètres, on prend à la suite neuf autres longueurs égales à *ai*, jusqu'en *b*; puis à partir de *b* on prend sur *bc* un certain nombre de longueurs égales à $ab = 10ai$, autant qu'en comporte l'espace qu'on a à sa disposition dans le sens *ac*. A chacun des points *a*, *b*,....., c'est-à-dire à l'extrémité de chaque distance décuple de *ai*, on élève une perpendiculaire à *ac* jusqu'à la première ligne *ef*. On joint l'extrémité *d* de la seconde perpendiculaire *bd*, à l'extrémité *h* de la neuvième division de *ab*; puis par chacun des autres points de division de *ab*, et par le point *a* lui-même, on mène des parallèles à *dh*. Cela fait, l'échelle est construite; on achève en y mettant des numéros, comme il est indiqué sur notre figure.

Il résulte de cette construction que les longueurs égales à *ai* représentent sur le plan des dizaines de mètres mesurées sur le terrain, les longueurs égales à *ab* des centaines de mètres, etc. Enfin, depuis le point *d* jusqu'à *hb*, les longueurs interceptées entre *db* et *dh*, sur les dix parallèles inférieures, représentent respectivement, d'après les propriétés des triangles semblables, 1^m, 2^m,..... 9^m, 10^m; ce sont des nombres d'unités simples (*).

On construit des échelles de ce genre sur des règles de cuivre, sur l'alidade de la planchette, par exemple.

50. *Usage de cette échelle.* On veut, par exemple, réduire à l'échelle une longueur égale sur le terrain à 248^m. On cherche le chiffre 8 des unités sur la ligne *db*; sur l'horizontale qu'indique ce

---

(*) En général, la longueur *ai* sur le plan représentant une certaine longueur mesurée sur le terrain, les longueurs égales à *ab* comprises entre les perpendiculaires, représenteront sur le plan des longueurs décuples, et les longueurs, telles que *mn*, des parallèles intérieures au triangle *dhb* représenteront 2, 3, ... 9, 10 longueurs dix fois moindre que celle que représente *ai*.

chiffre, on trouve dans le triangle *dhb*, $mn = 8^m$; à droite, on prendra deux longueurs de 100 mètres jusqu'au point q ; à gauche 4 dizaines jusqu'au point s (on est guidé à droite et à gauche par les chiffres d'en haut). Les trois longueurs réunies forment la longueur sq qui représente bien 248 mètres *à l'échelle adoptée.*

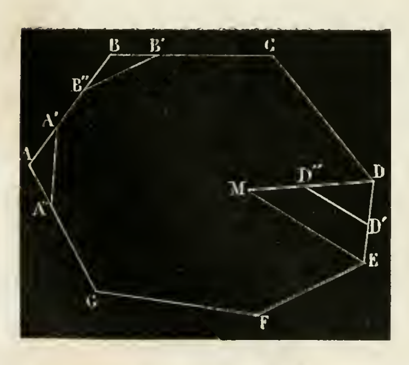
Il n'est pas plus difficile de résoudre le problème inverse ; évaluer à 1 mètre près la longueur sur le terrain d'une distance prise sur le plan. On se sert du compas pour reporter les longueurs, prises sur le plan, sur l'échelle construite comme il est dit n° 28, ou sur l'échelle décimale dont nous venons de nous occuper. On trouve ainsi aisément combien la longueur proposée contient de fois la longueur qui représente une centaine d'unités, puis celle qui représente une dizaine, etc.

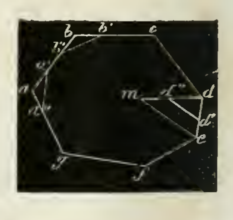
LEVÉ AU MÈTRE.

31. Le levé au mètre est celui qui se fait avec la chaîne, ou la roulette, ou une règle divisée, et des jalons au besoin, sans aucun autre instrument. On peut lever au mètre par toutes les méthodes ; mais on emploie ordinairement la méthode par cheminement un peu modifiée comme nous allons le voir (n° 6).

Supposons qu'il s'agisse de lever le plan d'un contour polygonal ABCDEFG, ou d'une ligne brisée quelconque.

Levé du plan. On mesure sur le terrain les côtés AB, BC,.....





comme il a été dit n° 6. Mais en même temps, au sommet A, on prend sur AB deux petites longueurs quelconques, AA', AA'', de

10 mètres chacune, par exemple, et on mesure la distance A'A''. On fait de même à chacun des sommets B, C. ..... On connaît ainsi les trois côtés d'un triangle AA'A'', contenant l'angle A; etc.

Construction du plan. On réduit toutes les longueurs trouvées suivant l'échelle adoptée; soient *ab*, *bc*, *cd*, ... *aa'*, *aa''*, *a'a''*, ..., ces longueurs réduites. On trace une droite égale à *ag*; on prend sur cette ligne une longueur égale à *aa''*; puis, sur *aa''* comme 1er côté, avec les longueurs *aa'*, *a'a''*, on construit un triangle *aa'a''*; ce triangle est semblable à AA'A'', et l'angle $a = $A. On prend sur *aa'* prolongée une longueur $ab =$ AB réduite, et on construit en B un triangle *bb'b''* avec les longueurs réduites *bb'*, *bb''*, *b'b''* de BB', BB'', B'B''; l'angle B = B. On prend $bc =$ BC réduite; etc., jusqu'au dernier sommet.

Vérifications. Arrivé au sommet *f*, on trace *fg*; cette ligne doit être égale à FG réduite. De plus, si l'on a pris en F et en G les mêmes mesures qu'aux autres sommets, ayant rapporté FF' et FF'' en *ff'*, *ff''*, puis tracé *f'f''*, on doit trouver *f'f''* égale à F'F'' réduite. De même au point *g*.

32. *Rattacher avec la chaîne un point quelconque* M *du terrain à une base* ED. Pour cela, on trace sur le terrain la ligne DM que l'on mesure. On prend sur DE et sur DM deux longueurs quelconques DD', DD'', de 10 mètres chacune, et on mesure D'D''. Cela fait, on rapporte DM sur le plan en *dm* comme on a rapporté AB, BC, etc.

Ou bien encore,

Si les distances EM, DE, DM *ne sont pas trop grandes*, on les mesure; puis on construit sur le plan le triangle *dem* avec les longueurs *réduites de* DE, EM, DM.

33. Puisque les angles peuvent être rapportés comme les longueurs, il est évident qu'on peut lever au mètre par toutes les méthodes. La chaîne et les jalons suffisent donc à la rigueur pour lever les plans dans presque tous les cas. Mais il faut être à deux pour la mesure des longueurs; de plus, mesurer une longueur parallèlement à l'horizon est une opération délicate, souvent difficile, à cause des inégalités du terrain, et qui peut être rendue impossible par divers obstacles. C'est pourquoi on emploie aussi d'autres instruments et d'autres procédés.

34. *Emploi du levé au mètre.* On lève au mètre le plan géométral d'une chambre, d'une maison, d'un ensemble de bâtiments, d'une cour, d'un jardin, d'un terrain libre et peu étendu, à contour sensiblement rectiligne.

Le levé au mètre s'emploie soit isolément pour ces divers objets, soit conjointement avec d'autres procédés pour lever des détails de ce genre sur un terrain plus étendu.

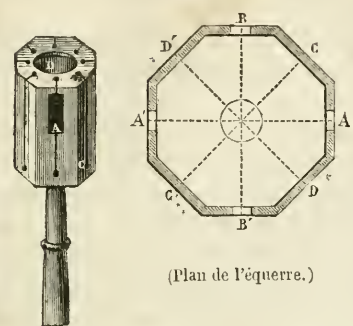
35. OBSERVATION GÉNÉRALE. Nous ne traiterons pas encore ici du levé d'un plan en général; nous ne le ferons qu'après avoir décrit tous les instruments, expliqué tous les procédés. Pour plus de clarté et de netteté, nous expliquerons chaque procédé en particulier le plus simplement possible. Nous venons de dire comment on lève au mètre, quand il est nécessaire ou convenable de lever au mètre; nous avons traité la question *élémentaire* de ce levé, celle à laquelle se ramènent toutes les autres. Nous expliquerons de même tout à l'heure le levé à l'équerre, puis le levé au graphomètre, etc. Quand le lecteur sera familiarisé avec tous les instruments, connaîtra tous les procédés, nous aborderons la question générale. Il verra bien alors que ces procédés ne sont nullement exclusifs l'un de l'autre; ayant à lever le plan d'un terrain, il sera à même de choisir le procédé le plus commode, le plus avantageux, eu égard aux instruments qu'il aura à sa disposition. Il verra que souvent, dans un même levé, il convient d'employer un procédé pour une partie du terrain, un autre procédé pour une autre partie, etc.

TRACÉ DES PERPENDICULAIRES.

36. ÉQUERRE D'ARPENTEUR. On se sert, pour mener avec précision des perpendiculaires sur le terrain, d'un instrument spécial qu'on appelle *équerre d'arpenteur*. Cet instrument a plusieurs formes; le plus souvent, c'est une boîte en cuivre qui a la forme d'un cylindre droit, ou d'un prisme droit ayant pour base un octogone régulier, de 8 à 10 centimètres de hauteur et de 6 à 8 centimètres de diamètre. Nous ne décrirons que le prisme qui est le plus solide et le plus commode.

Sur les faces opposées, qui sont parallèles deux à deux, sont pratiquées huit *fentes* ou *pinnules*, placées à 45° l'une de l'autre suivant la ligne qui divise chaque face en deux parties égales dans le sens de sa longueur. Quatre de ces ouvertures, opposées deux à deux dans deux directions perpendiculaires entre elles, 1° A et A', 2° B et B', sont moitié croisée (fente large), moitié fente

étroite, et disposées de telle manière que la fente A d'un pan correspond à la croisée A' du pan opposé, et *vice versâ*. On met l'œil à la fente (nommée pour cela *œilleton*). Chaque croisée est traversée en son milieu et dans le sens de la fente d'un fil de soie ou de crin très-fin. Le plan des fils A et A' est perpendiculaire à celui des fils B et B'.



(Plan de l'équerre.)

Les quatre autres faces C, C', D, D', sont percées de fentes étroites ou de traits de scie en ligne droite surmontés d'une petite ouverture ronde.

Si la boîte est cylindrique, huit fentes semblables sont disposées sur sa surface, à 45° l'une de l'autre.

Une douille vissée sous la boîte permet de l'emmancher sur un grand bâton, à pointe ferrée, qu'on enfonce dans la terre. Ce *pied* de l'équerre est quelquefois divisé en décimètres et centimètres, et peut servir à vérifier la chaîne.

Quand l'instrument ne sert pas, on rentre la douille dans la boîte qu'on enferme elle-même dans une boîte de carton.

Usages de l'équerre.

37. Problème. *Mener une perpendiculaire en un point* C *d'une droite donnée.*

On plante l'équerre *verticalement* au point C, de manière que le point A étant visé à travers deux pinnules opposées, on voit le point B sur la même ligne, en regardant dans l'autre sens. Cela fait, on vise à travers les pinnules de la direction perpendiculaire à AB, et on fait placer par un aide



un jalon D, qui soit vu de C sur cette nouvelle direction. La ligne CD est la perpendiculaire cherchée.

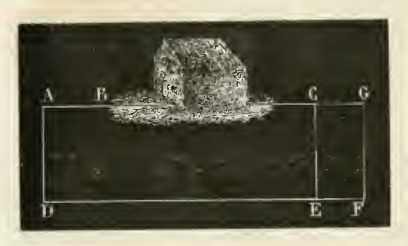
En répétant cette construction, on peut mener des *parallèles* (V. la Géométrie, et plus loin les problèmes).

38. *Abaisser d'un point donné* D, *extérieur à une droite* AB, *une perpendiculaire sur cette ligne* (fig. précédente).

L'arpenteur, muni de son équerre, apprécie à peu près, à vue d'œil, la position du pied de la perpendiculaire, puis il place son équerre au point qu'il présume être le pied cherché, comme s'il voulait mener en ce point une perpendiculaire à AB. S'il voit, à travers les pinnules, le jalon D à droite ou à gauche de la direction perpendiculaire à AB, il avance son équerre, en tâtonnant, le long de AB du côté du point D, jusqu'à ce qu'il ait ce point D sur la direction de sa perpendiculaire. Il marque alors par un jalon la place qu'occupe en C le pied de son équerre.

Il faut une assez grande habitude pour déterminer rapidement de cette manière le pied d'une perpendiculaire.

Application. *Prolonger une droite* AB *au delà d'un obstacle.*



On abaisse sur AB une perpendiculaire AD qu'on mesure; puis sur AD une perpendiculaire DF qu'on prolonge au delà de l'obstacle. On élève sur DF deux perpendiculaires EC, FG que l'on prend égales à DA. La droite CG est le prolongement de AB.

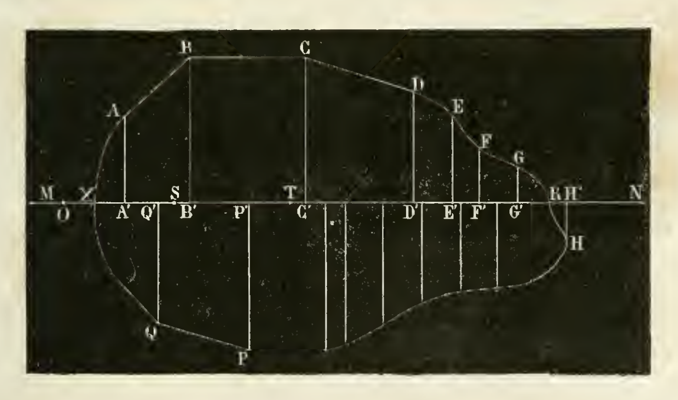
39. Vérification d'une équerre. On dispose son équerre bien verticalement en un lieu C (*fig.* du n° 37). Visant à travers deux pinnules dans une certaine direction AB, on fait planter un jalon en B à 50 ou 60 mètres de l'instrument. Visant ensuite, à travers deux autres pinnules, dans la direction CD perpendiculaire à AB, on fait planter un autre jalon D à la même distance. Puis on fait faire à l'équerre, sans déranger son aplomb, un quart de tour de D vers B, jusqu'à ce qu'on voie le jalon B à travers les *secondes pinnules*. Alors, sans déranger l'instrument, on doit voir le jalon D à travers les *premières*.

LEVÉ A L'ÉQUERRE.

40. Ce levé se fait par *la méthode des perpendiculaires* (n° 10) avec la chaîne, l'équerre d'arpenteur, et des jalons. Il est avantageux de se servir de deux chaînes, l'une servant à mesurer les perpendiculaires abaissées des points remarquables du sol sur la base, l'autre à mesurer sur cette base les distances des pieds de ces perpendiculaires au point fixe choisi sur cette ligne pour origine des distances.

Problème. *Soit à lever le plan d'un contour polygonal ou sinueux* ABCDEFGH....PQ.

Levé du plan. On choisit sur le terrain une base MN telle qu'on puisse mesurer aisément les distances comptées dans cette direction, et les perpendiculaires abaissées de A, B, C,... sur cette droite. On place le premier jalon de l'alignement MN en un point O



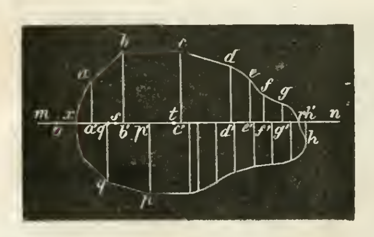
tels que les pieds de toutes les perpendiculaires à abaisser soient du même côté de ce point. On *tend* une des chaînes de ce côté à partir de O dans la direction ON; supposons qu'elle finisse en S (*). On détermine avec l'équerre le pied de chacune des perpendiculaires qui tombent entre O et S; supposons qu'il en tombe deux, en A' et en Q'. On voit sur la chaîne OS les longueurs de OA' et de OQ'; on mesure avec la seconde chaîne les perpendiculaires AA', QQ', et on inscrit ces

(*) Deux fiches plantées intérieurement contre les poignées la tiennent bien tendue.

quatre longueurs sur le croquis ou sur le carnet. Cela fait, le géomètre et son aide enlèvent la première chaîne et la tendent une seconde fois de S en T sur la direction MN. On détermine encore les pieds B′ et P′ des perpendiculaires à MN qui tombent dans cet intervalle ST. On lit sur la chaîne tendue les distances SB′, SP′, et on les augmente chacune de 10 mètres, ce qui donne les distances OB′, OP′. On mesure avec la seconde chaîne les perpendiculaires BB′, PP′. On inscrit ces diverses longueurs sur le croquis. Ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait mesuré toutes les distances analogues sur MN, et toutes les perpendiculaires abaissées sur cette base.

Si le contour à relever rencontre la base MN, comme celui de notre figure en X et en R, il est bon de mesurer les distances OX, OR, au moment où chacun de ces points X, R se trouve sur la chaîne tendue; ces mesures, comme nous le verrons, fournissent des vérifications (*).

Construction du plan. On réduit, suivant l'échelle, toutes les distances mesurées AA′, BB′,..., OA′, OQ′, OB′,...; soient *aa′*, *bb′*... *oa′*, *oq′*, *ob′*,... ces distances réduites. On marque un point *o* sur *mn* de manière que toute la figure puisse tenir du côté *on*. Puis à partir de *o*, on mesure des distances égales à



oa′, *oq′*, *ob′*, etc. Aux points *a′*, *q′*, *b′*, etc., on élève des perpendiculaires à *mn* d'un côté ou de l'autre (d'après le croquis ou d'après ce qui a été fait sur le terrain); on prend sur ces perpendiculaires

(*) Nous conseillons de mesurer les distances sur la base à partir du même point O. Il semble plus naturel, au premier abord, de mesurer la première longueur OA′, puis les intervalles A′B′, A′C′, ... entre les perpendiculaires. Mais nous remarquerons d'abord qu'en s'y prenant comme nous l'indiquons, on obtient aussi promptement les distances OA′, OB′, O′C, ... qu'on obtiendrait les longueurs OA′, A′B′, B′C′. Cela posé, il y a avantage à mesurer les distances OA′, OB′, OC′, ... En effet, les erreurs de lecture commises dans ces diverses mesures sont sensiblement les mêmes et de même sens. Si l'on prend OA′ un peu trop longue, par exemple, il en sera de même pour OB′. A′ et B′ avancés tous deux auront la même position relative. De même pour les autres points. Si, au contraire, on mesure séparément OA′, A′B′, B′C′, ... les erreurs peuvent s'ajouter, et alors les positions relatives des points A′, B′, C′, ... sont altérées.

des longueurs respectivement égales à $a'a$, qq', $b'b$,.... Cela fait, on joint les points a, b, c, etc... de la même manière qu'ils sont joints sur le terrain.

Si la ligne relevée ABC... rencontre la base en deux points X et R, la ligne semblable *abc*... doit la rencontrer d'elle-même en deux points homologues x et r. En mesurant ox, or, on doit trouver ces longueurs égales à OX et OR du terrain réduites à l'échelle.

Remarque. Les points remarquables isolés qu'il convient de rattacher à la base MN, se relèvent de la même manière que les points A, B, C,..., et en même temps.

Les longueurs des perpendiculaires et leurs distances au même point O de la base peuvent être inscrites avec ordre dans un tableau disposé comme il suit :

Base MN.

POINTS relevés.	LONGUEURS des perpendiculaires.	DISTANCES des perpendiculaires au point O.
	mètres.	mètres.
A	4,84	3,25
B	7,28	7,31
C	5,32	10,54
. .	. . .	. . .

41. Règle de Kutsch. On se sert avantageusement pour rapporter les plans levés à l'équerre de la règle de Kutsch, qui n'est autre chose qu'un double décimètre, dont les deux bords taillés en biseau sont divisées absolument de la même manière en centimètres et en millimètres; les divisions de même numéro se correspondent deux à deux sur une même perpendiculaire aux bords de la règle. Pour mener une perpendiculaire à une droite déjà tracée sur le papier, on place la règle de manière que deux divisions correspondantes se trouvent sur cette droite, l'une au point choisi; puis, à partir de ce point, on tire une ligne le long de la règle. Veut-on que cette perpendiculaire ait une longueur donnée, qui se réduit d'après l'échelle du plan à un certain nombre de millimètres, on compte ce nombre de millimètres à partir du pied de la perpendiculaire qu'on termine en conséquence.

La règle de Kutsch sert encore à mesurer sur le plan la distance qui sépare deux points du terrain.

42. Usage du levé a l'équerre. La méthode des perpendiculaires, exigeant le tracé et la mesure d'un grand nombre de droites, ne peut s'employer que dans les endroits où la mesure des longueurs est facile. Elle convient particulièrement dans un terrain long et étroit, à contour irrégulier. On emploie surtout cette méthode pour lever les lignes courbes ordinairement sinueuses : par exemple, les bords d'une rivière, le contour d'un lac, d'un étang, le périmètre d'un terrain dans lequel on ne peut pénétrer. Dans chacun de ces cas on inscrit ou on circonscrit à la courbe que l'on veut relever une droite ou un système de droites qu'on relève d'abord avec le plus grand soin, soit à l'équerre, soit par la méthode qui convient le mieux. Chacune de ces droites sert de base pour lever à l'équerre une partie de la courbe. (*Voir* les grandes figures de levés de plan ci après et celles de l'arpentage.)

On doit choisir les bases de manière à éviter les longues perpendiculaires et les obstacles qui rendraient difficile la mesure des longueurs à considérer. Quand une partie de la ligne sinueuse s'éloigne trop de la base, on remplace celle-ci auxiliairement par une parallèle plus rapprochée; on mesure la distance des deux parallèles, que l'on ajoute à chaque perpendiculaire de cette partie du levé.

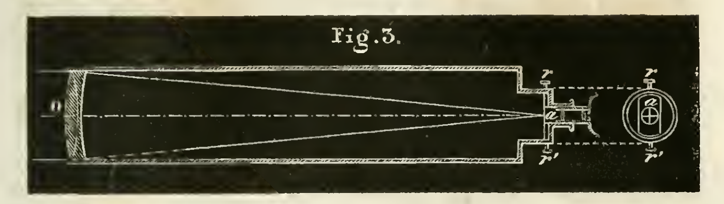
Le levé à l'équerre comme le levé au mètre, comme toute autre méthode, s'emploie soit isolément soit conjointement avec d'autres méthodes.

MESURE ET CONSTRUCTION DES ANGLES.

43. Plusieurs instruments servent à mesurer les angles sur le terrain; le principal est le graphomètre. Avant de les décrire, nous parlerons de la lunette astronomique et de l'alidade, qui font partie, l'une et l'autre, comme élément essentiel, du graphomètre et d'un grand nombre d'autres instruments employés aux opérations topographiques.

44. La *lunette astronomique*, dont notre figure offre une coupe longitudinale, se compose d'un tube aux extrémités duquel sont enchâssés deux verres lenticulaires, l'un assez grand, O, dirigé vers l'objet, et qui, pour cette raison, se nomme l'*objectif*, l'autre très-petit derrière lequel on place l'œil et qu'on nomme

culaire. Les rayons lumineux envoyés par un objet se brisent en



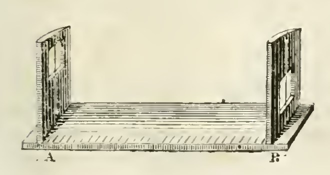
traversant l'objectif, et viennent former dans l'intérieur de la lunette à l'endroit *a* qu'on appelle foyer une image renversée de l'objet. A l'aide de l'oculaire on regarde cette image comme avec une loupe (verre grossissant). (V. la physique.)

Réticule. Afin de donner plus de précision à la visée, on place au foyer *a* de la lunette, près de l'oculaire, une petite plaque percée d'un trou circulaire dans lequel sont tendus deux fils très-fins qui se croisent au centre *a*; ce petit appareil se nomme *réticule.* Quand on vise un objet, on fait tourner la lunette de manière que cet objet ou un point de cet objet soit occulté par le point *a*.

La direction du rayon visuel coïncide alors avec l'axe optique *a*O de la lunette. Cet axe optique a une position précise par rapport aux parois solides des tubes; il est donc facile de suivre la direction du rayon visuel et de mesurer l'angle qu'elle fait avec une ligne donnée, soit à l'aide d'un cercle divisé, soit autrement. Il est également facile de donner à la ligne de visée une direction quelconque.

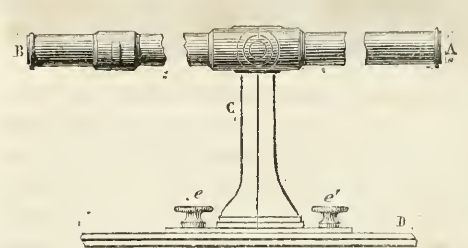
45. Pinnules. On appelle pinnules une plaque de cuivre A (fig. suivante) portant, dans le sens de sa longueur, deux fentes situées l'une au-dessus de l'autre. L'une de ces fentes, très-étroites, s'appelle *œilleton;* l'autre assez large s'appelle une *croisée.* Un fil très-fin dirigé dans le sens de la longueur de la pinnule divise la croisée en deux parties égales.

46. Alidade a pinnules. Elle se compose d'une règle de bois ou de cuivre portant à ses deux extrémités deux pinnules A et B perpendiculaires à son plan. Dans l'une de ces pinnules A, l'œilleton est en bas et la croisée en haut; dans l'autre, B, au contraire, c'est la



croisée qui occupe la partie inférieure. Pour viser avec cet instrument, on dispose la règle horizontalement en la dirigeant vers l'objet. Puis on approche l'œil d'un œilleton; l'objet visé doit être occulté par le fil de la croisée opposée.

47. Alidade à lunette. Elle se compose d'une règle de bois ou de cuivre portant en son milieu une tige perpendiculaire à son plan, et sur cette tige une lunette à réticule qui peut pivoter autour d'un axe parallèle au plan de la règle et perpendiculaire à sa direction. Pour viser avec cet instrument, on dispose la règle horizontalement en la dirigeant vers l'objet; on sait que l'objet doit être occulté par le point de croisement des fils du réticule.

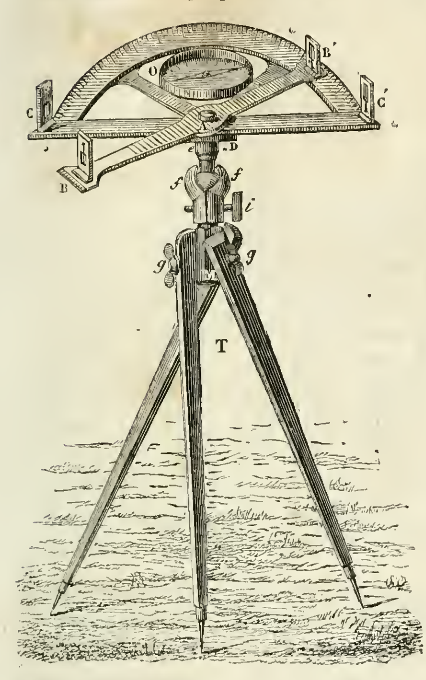


48. Une alidade sert à déterminer la projection horizontale du rayon visuel qui va à l'objet visé. Le plan vertical qui passe par les fils des deux pinnules, ou celui qui décrit l'axe optique de la lunette dans son mouvement de rotation, coupe le plan de la règle suivant une ligne facile à reconnaître, qui est évidemment la projection horizontale du rayon visuel en question. Cette ligne, qui coïncide ordinairement avec le bord de la règle ou lui est parallèle, s'appelle *ligne de foi*, ou ligne de *collimation.*

49. Du graphomètre. Le *graphomètre* sert à mesurer les angles; il se compose d'un demi-limbe circulaire gradué (exactement semblable au rapporteur), et de deux alidades à pinnules, l'une fixe CC', dirigée suivant le diamètre du limbe et faisant corps avec lui, l'autre BB', mobile autour du centre du limbe, et située dans son plan. La direction de l'alidade fixe CC' s'appelle *ligne de foi* (*).

(*) Les alidades à pinnules du graphomètre peuvent être remplacées avantageusement par deux lunettes à réticules. L'une d'elles est *fixée* au-dessous du limbe suivant son diamètre; l'autre, placée sur le limbe, peut tourner autour du centre. Chacune de ces lunettes est munie d'une vis de pression qui permet,

Le limbe du graphomètre porte, comme le rapporteur, une double graduation en demi-degrés de 0° à 180°.

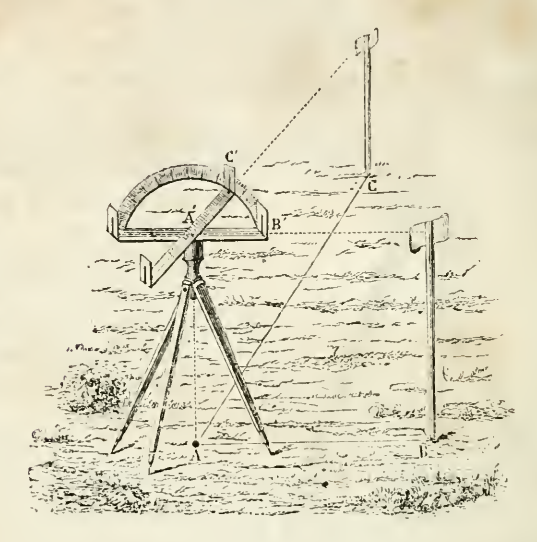


Les pinnules C, C', de l'alidade fixe doivent être disposées de manière que la ligne des deux points du limbe marqués 0° et 180° soit dans le plan des fils. En outre, l'alidade mobile BB' porte à ses extrémités des verniers dont les zéros sont placés dans les plans des fils de ses pinnules (V. plus loin les *Verniers*).

Le limbe est fixé par son centre à une tige *e* terminée par une sphère d'environ 0,02 de diamètre. Cette sphère est embrassée par deux coquilles, *f*, *f*, que l'on peut écarter ou rapprocher de manière à permettre ou à empêcher le mouvement de la sphère à l'aide de la vis *i*; cet assemblage porte le nom de *genou à coquilles*. La sphère tournant, on peut donner au plan du limbe une position quelconque dans laquelle on le fixe en serrant la vis *i*. Les coquilles se réunissent en une tige qui se termine par une douille ou cylindre creux dans lequelle s'emmanche l'axe M d'un trépied T qui porte l'instrument. Les trois branches en bois de ce trépied, terminées en fer de lance, s'appliquent au moyen de vis de pression, *g*, contre les faces du manche M ci-dessus indiqué.

étant desserrée, de rendre le mouvement rapide; une vis de rappel sert à lui donner un mouvement lent. Avec les alidades à lunettes, on obtient plus de précision dans la visée.

49 *bis*. Usage du graphomètre. Pour mesurer avec le graphomètre l'angle BAC de deux droites horizontales, il suffit de connaître le som-



met A et un point bien indiqué sur chaque côté par un jalon ou par un signal quelconque disposé verticalement. On commence par assujettir à frottement doux le genou de l'instrument; puis on dispose le trépied de manière que l'axe de la pièce M, dirigé verticalement, passe par le sommet A; on se sert pour cela d'un fil à plomb, attaché à cette pièce M et qu'on laisse tomber. Cette condition à peu près remplie (*), on serre les vis g, g et on enfonce les pointes ferrées dans le sol. Puis on fait tourner la sphère entre les coquilles, de manière à ce que, le limbe étant rendu horizontal, l'alidade fixe ait la direction AB; on y parvient après quelques tâtonnements. On serre alors fortement la vis i, puis on fait tourner l'alidade mobile jusqu'à ce que le jalon C, visé à travers les pinnules, se trouve derrière le fil (**). L'arc B'C', compris alors entre le zéro du

(*) Cette condition ne serait pas tout à fait remplie qu'il n'en résulterait généralement qu'une erreur très-petite et négligeable sur la valeur de l'angle ABC.

(**) Le pied du graphomètre est terminé supérieurement par un disque D, au centre duquel se trouve un *pivot* A qui traverse à la fois le limbe et l'alidade fixe (fig. de la page 28).

limbe et la division qui correspond au fil de la croisée mobile, mesure l'angle BAC.

Si les lignes AB, AC du terrain ne sont pas horizontales, l'arc B'C' mesure l'angle BAC *réduit à l'horizon*, c'est-à-dire projeté sur un plan horizontal. Les jalons en B et en C doivent être plantés *verticalement*.

50. *Mesure d'un angle* BAC *dont le plan n'est pas horizontal.*

Les points B, A, C qui déterminent cet angle doivent être donnés avec précision. Le graphomètre mis en station au sommet A étant, comme dans le cas précédent, sur la verticale de ce point, on vise, pour plus d'exactitude, deux points *b*, *c*, situés sur les verticales des points B et C, au-dessus de ces points à la hauteur du graphomètre (*). Pour cela, on fait tourner la sphère du genou à frottement doux entre ses coquilles, et par suite le limbe de manière que l'alidade fixe étant dirigée vers le point *b*, le plan du limbe passe aussi par le point *c* (**). On parvient, après quelques tâtonnements, à donner cette position. On serre alors la vis *i*, puis on fait tourner l'alidade mobile pour la diriger vers le point *c*. Quand elle a bien cette direction, on lit sur le limbe la valeur de l'angle BAC qui est mesurée par l'arc B'C'.

Vérification du graphomètre. On se place en station sur un terrain découvert, successivement en trois points A, B, C, et on y mesure les trois angles BAC, CBA, BCA, du triangle ABC ; la somme des angles mesurés doit être égale à 180°. Ou bien encore, sans quitter une station O, on vise *horizontalement* dans un certain nombre de directions des points A, B, C, D, en prenant la mesure des angles AOB, BOC, etc., tout autour du point O ; la somme des angles mesurés doit être 360°. De l'une ou de l'autre manière si l'on ne trouve pas précisément pour somme 180° ou 360°, la différence divisée par le nombre des angles mesurés est l'erreur moyenne que l'on peut commettre *en faisant usage* de l'instrument.

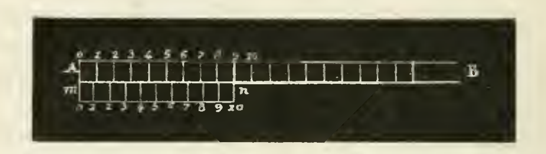
51. Des verniers. Afin que les divisions du graphomètre soient nettes et distinctes, on se borne ordinairement à diviser le limbe en demi-degrés ou au

(*) A peu près comme dans la figure précédente ; appelez *b* et *c* les deux points visés sur les jalons B et C.

(**) C'est-à-dire que le point *b* comme le point *c* doit être sur la direction d'un rayon visuel dirigé au ras du limbe.

plus en quarts de degrés. Quand on mesure les angles du terrain uniquement pour les rapporter sur le papier (par ex.: dans le levé d'un plan), il est inutile de les évaluer avec plus d'approximation; car le rapporteur dont on se sert pour construire ces angles sur le papier n'en permet pas une plus grande. Mais il n'en est pas ainsi quand les angles mesurés doivent servir à *calculer* certaines longueurs du terrain (trigonométrie). C'est pour les obtenir, dans ce cas. avec une plus grande approximation qu'on a terminé des deux côtés la règle de l'alidade mobile par des arcs divisés qu'on peut voir sur la figure ; ces arcs divisés sont des *verniers circulaires*.

32. On appelle, en général, *vernier* ou *nonius* une petite règle divisée *mn* qui, adaptée à une plus grande AB, à côté de laquelle elle glisse librement, permet d'évaluer les longueurs à moins d'une fraction déterminée de la plus petite division de la grande règle.



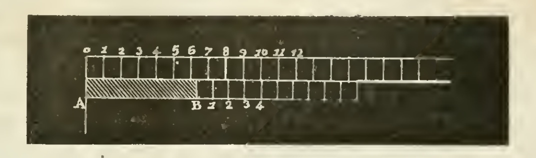
Un vernier *circulaire* est un arc divisé adapté à un plus grand arc de même rayon, dans un but analogue.

Construction d'un vernier. La plus petite division d'une règle AB étant, par exemple, le millimètre, on veut lui adapter un vernier qui permette d'évaluer les longueurs à moins d'un dixième de millimètre. On prend une petite règle bien dressée *mn* de 9 millimètres de long (10 — 1); on la divise en 10 parties égales ; puis on l'adapte à la plus grande, de manière que lorsqu'elle glisse à côté de celle-ci dans une coulisse ou autrement, les traits des deux règles soient parallèles.

Si l'on fait coïncider les deux zéros des deux règles (*fig.* précédente), on remarque aisément que le n° 1 du vernier, *mn*, précède de $\frac{1}{10}$ de millimètre le n° 1 de la grande règle (une division du vernier ne valant que $\frac{9}{10}$ de millimètre); le n° 2 du vernier précède de $\frac{2}{10}$ de millimètre le n° 2 de la règle, et ainsi de suite jusqu'au n° 10 du vernier qui, précédant le n° 10 de la règle de $\frac{10}{10}$ de millimètre, coïncide précisément avec le n° 9 de la règle. C'est sur ces écarts des divisions des deux règles, progressivement croissants à partir du 0 du vernier, qu'est fondé l'usage de cet instrument.

Usage du vernier. On place la longueur à mesurer le long de la grande règle, à partir du 0 de celle-ci. Supposons qu'alors la seconde extrémité de cette longueur tombe entre les n°s 6 et 7 ; on conclut de là que cette longueur

se compose de 6 millimètres plus une fraction de millimètre. Pour évaluer cette fraction approximativement, on fait avancer le vernier vers la longueur AB,



de manière que son zéro soit à l'extrémité de cette longueur. Puis on regarde quel est le trait du vernier qui coïncide alors avec un trait de la règle ; ou, à défaut d'une telle coïncidence, quel est le trait qui se rapproche le plus d'un trait de la règle. Supposons que le premier cas ait lieu, que le n° 4 du vernier coïncide alors avec un trait de la règle ; on conclut de là que la longueur à évaluer se compose de 6 millimètres $\frac{4}{10}$.

En effet, si l'on revient des traits qui coïncident vers le 0 du vernier, à mesure qu'on avance d'une division dans ce sens, on voit l'écart entre le trait du vernier et le trait voisin de la règle augmenter de $\frac{1}{10}$ de millimètre ; cet écart est de $\frac{1^{\text{mill.}}}{10}$ après une division, $\frac{2^{\text{mill.}}}{10}$ après deux divisions, etc., après 4 divisions parcourues (du 4 au 0 du vernier), l'écart est donc de $\frac{4^{\text{mill.}}}{10}$ entre le zéro du vernier ou l'extrémité B de la longueur AB et le trait voisin, n° 6, de la grande règle.

En général, si n est le numéro du vernier qui coïncide avec un trait de la règle, $\frac{n}{10}$ de millimètre est la longueur de la fraction à évaluer. Si le n° 4 du vernier était seulement le numéro du vernier qui se rapproche le plus d'un trait de la grande règle, on conclurait que la fraction de millimètre que l'on cherche à évaluer est $\frac{4}{10}$ de millimètre, à moins de $\frac{1}{10}$ de millimètre.

Règle générale. Si l'on veut évaluer des longueurs à moins de la $n^{\text{ième}}$ partie d'une division de la grande règle, on prendra une petite règle bien dressée dont la longueur soit précisément $n-1$ divisions de la grande règle, et on divisera cette petite règle en n parties égales. Il suffit de remarquer que chacune de ces divisions vaut $\frac{n-1}{n}$ d'une division de la grande règle, pour comprendre ce qui arrive quand on a adapté les l'une à l'autre.

53. Vernier circulaire. La longueur d'un arc de cercle se mesurant à l'aide d'un arc gradué comme une ligne droite se mesure avec une règle, on construit des verniers circulaire s d'après les mêmes principes que les verniers rectilignes, et on s'en sert de la même manière.

Le *vernier du graphomètre* est un arc de 29 demi-degrés divisés en 30 parties

égales; il permet donc d'évaluer les arcs et les angles à moins de $\frac{1}{30}$ de demi-degré, c'est-à-dire à moins d'une minute. Le zéro de ce vernier est placé à l'extrémité de la ligne de foi de l'alidade (n° 49); il coïncide donc toujours avec l'extrémité de l'arc à mesurer. Dès lors, il suffit de remarquer à quel numéro du vernier a lieu la coïncidence des traits des deux arcs, ou le rapprochement le plus grand de deux traits. Ce numéro du vernier indique combien il faut ajouter de minutes à l'arc indiqué par la division du limbe principal qui précède immédiatement le zéro du vernier (*).

Remarque. La base de chaque pinnule occupant un arc de 6° environ, on ne peut mesurer avec le graphomètre à vernier ni un angle inférieur à 6°, ni un angle supérieur à 174°. Quand cela est nécessaire, on choisit une ligne auxiliaire du terrain au dehors ou au dedans de l'angle à mesurer, de manière que cet angle soit dans le 1er cas la différence de deux angles plus grands, et dans le 2e cas, la somme de deux angles plus petits.

LEVÉ AU GRAPHOMÈTRE.

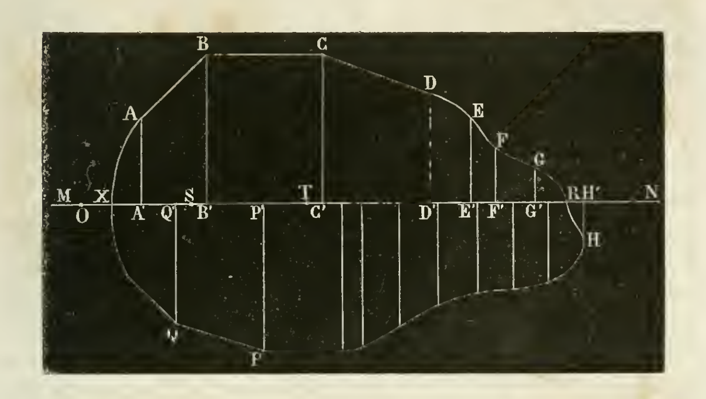
54. On se sert du graphomètre quand il est nécessaire ou avantageux de substituer la mesure des angles à celle d'un certain nombre de longueurs. Le graphomètre n'est pas le seul instrument qui serve à la mesure des angles, mais c'est celui qui les donne avec plus de précision. On lève au graphomètre par toutes les méthodes que nous connaissons (préliminaires); mais celle qui convient le mieux est la méthode *par intersections*.

Levé du plan. On choisit une base MN des extrémités de laquelle on aperçoive aisément les points à relever; on la mesure avec soin. On met le graphomètre en station au point M, de manière que l'alidade fixe ait la direction MN; on fixe le limbe horizontalement dans cette position. Puis on dirige l'alidade mobile successivement vers les points A, B, C, ...; on inscrit les valeurs des angles AMN, BMN,..... Cela fait, on transporte le graphomè-

(*) Quand on se sert de la seconde graduation du limbe pour mesurer un angle obtus qui est le supplément de l'angle aigu indiqué par la 1re graduation, il faut ajouter au nombre de demi-degrés indiqué sur la 2e graduation, non pas le nombre de minutes indiqué par le vernier (depuis son zéro jusqu'à la coïncidence), mais la différence entre ce nombre de minutes et 30'. C'est ce qu'on voit aisément à l'inspection de l'instrument pour le calcul actuel, eu égard à nos précédentes explications.

tre en N et on l'y met en station, de manière que l'alidade fixe ait la direction NM; puis on dirige l'alidade mobile vers les mêmes points A, B, C, ... ; on inscrit encore les angles ANM, BNM, etc.

Construction du plan (*fig.* 2). On trace une ligne *mn* égale à MN



réduite à l'échelle (si cette ligne n'est pas déjà tracée). Puis au point *m*, on fait successivement avec le rapporteur les angles *amn*, *bmn*, ... égaux à AMN, BMN, ...; puis au point *n* les angles *anm*, *bnm*, ..., égaux à ANM, BNM, ... On marque le point *a* où se rencontrent les lignes *ma*, *na*, qui correspondent au même point A du terrain; on marque de même le point *b* correspondant au point B; etc. Cela fait, on joint les points *a*, *b*, *c*, ... sur le papier de la même manière que leurs homologues A, B, C, ... sont joints sur le terrain. Un point O isolé sur le terrain reste isolé sur le papier.

55. *Méthode par cheminement.* Quand les obstacles, tels que des arbres, des maisons, empêchent de viser dans les directions convenables à travers le terrain, on peut employer la méthode *par cheminement* en reliant les points par une suite de lignes droites que l'on peut parcourir et mesurer. Supposons qu'il s'agisse de relever un contour polygonal ABCDE.....

Levé du plan. On mesure les côtés AB, BC, CD ... avec la chaîne, et successivement à mesure qu'on se trouve aux sommets B, C, D, on y mesure avec le graphomètre les angles ABC, BCD, etc.

Construction du plan. On réduit suivant l'échelle toutes les lon-

gueurs AB, BC, CD, ... ; soient *ab*, *bc*, *cd*, ... ces longueurs réduites. On trace une 1re ligne égale à *ab* si cela n'est pas déjà fait. Puis on continue la construction comme il a été indiqué n° 6.

56. Nous n'avons pas besoin d'expliquer le levé au graphomètre par les autres méthodes; on voit assez ce qu'il faut faire pour les appliquer; nous renvoyons à ce qui a été dit dans les préliminaires.

57. Remarques. La méthode par intersections offre l'avantage de n'exiger que la mesure d'une seule base, et deux stations seulement l'une en M, l'autre en N, pour mesurer les angles. Il importe en général d'éviter la mesure des grandes lignes et les stations trop nombreuses, parce que, à chaque station, il faut un temps assez long et des soins particuliers pour bien mettre en station le graphomètre ou la planchette (n° 62).

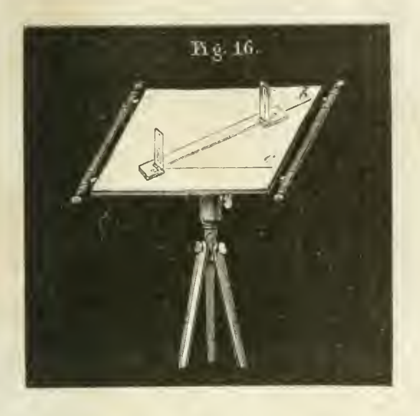
Néanmoins, il y a des cas où cette méthode n'est pas assez rigoureuse. Un point est mal déterminé par l'intersection de deux droites, quand ces lignes se rencontrent sous un angle très-aigu, ou, ce qui est la même chose, voisin de 180°, parce que, vu l'épaisseur des lignes tracées sur le papier, le lieu de leur rencontre est alors une espèce de losange dans lequel il faut distinguer le point d'intersection des lignes géométriques. Pour éviter cet inconvénient, il faut choisir la base aussi grande que possible, à peu près le cinquième ou le sixième de la plus grande des lignes qui doivent joindre ses extrémités aux points à relever. Il faut de plus la choisir telle qu'il ne se trouve aucun de ces points sur son prolongement ou très-près de ce prolongement; car pour ces points la construction serait illusoire.

DE LA PLANCHETTE.

58. Quand on n'a pas besoin d'une très-grande précision et qu'on veut opérer plus rapidement, on fait usage de la *planchette*, à l'aide de laquelle on peut à *la fois lever et rapporter un plan.*

Planchette. La planchette est une planche à dessiner, parfaitement dressée (*fig.* 16), sur laquelle on tend une ou plusieurs feuilles de papier, au moyen de deux petits cylindres mobiles sur

leurs axes, disposés à cet effet sur les bords de la planchette, comme le montre la figure. Celle-ci est supportée, comme le graphomètre, par un *genou à coquilles* (V. la fig.), ou un genou à la Cugnot (n° 59), et un pied à trois branches.



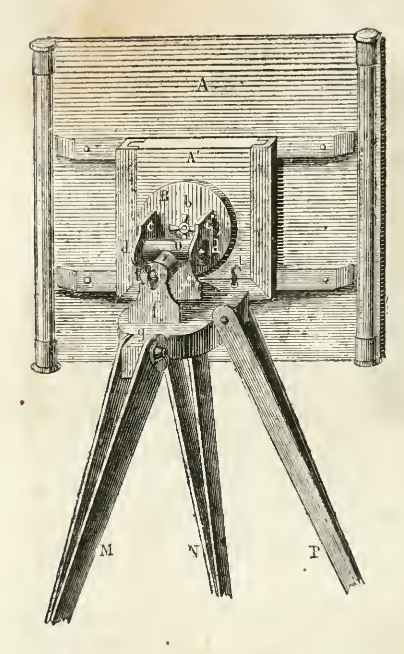
Sur un genou à coquilles, on rend la planchette horizontale de la même manière que le graphomètre. Pour plus de précision, on peut se servir de deux niveaux à bulle d'air, *n* et *n'*, que l'on pose dans deux directions rectangulaires sur la planchette déjà rendue à peu près horizontale. On fait tourner doucement la sphère du genou autour d'un diamètre parallèle au niveau *n* jusqu'à ce que la bulle de *n'* soit au milieu du tube, puis autour d'un diamètre parallèle à *n'* jusqu'à ce qu'il en soit de même de la bulle de *n* (note, p. 37).

Sur la planchette disposée horizontalement, on pose une alidade mobile, AB, à pinnules ou à lunettes; cette alidade est évidée de manière que son bord intérieur soit dans le plan vertical qui passe par les fils des pinnules ou par l'axe de la lunette.

59. PLANCHETTE SUR GENOU A LA CUGNOT. La planchette est souvent montée sur un *genou à la Cugnot;* nous allons décrire ce mode de suspension très-usité aujourd'hui; il offre notamment cet avantage que, l'instrument supporté étant rendu horizontal, on peut sûrement le faire tourner sans altérer cette horizontalité.

Un trépied ordinaire MNP supporte un disque de bois *g* très-fort sur lequel sont implantées perpendiculairement deux tiges de bois *f*, *f'*. Ces tiges *f*, *f'* sont traversées par un boulon *ee'* qui traverse intérieurement une pièce de bois formée de deux gros cylindres D, E dont les axes sont perpendiculaires entre eux; le boulon *ee'* traverse l'un des cylindres E suivant son axe. Le cylindre D est traversé de même par un autre boulon *dd'* qui relie à ce

cylindre deux autres tiges de bois c, c', semblables à f, f', mais qui sont libres de tourner autour du boulon dd' quand l'*écrou* n'est pas serré. Sur ces tiges c, c' est implanté perpendiculairement un second disque B parallèle à l'axe dd'. Ce disque B supporte lui-même une petite planche A′ à laquelle il est relié par un boulon ba' qui les traverse tous deux perpendiculairement. La tête a' du boulon repose sur la planche A′ et l'écrou b presse la face inférieure du disque B. Tel est le genou à la Gugnot avec son trépied. On pose sur la planche A′ l'instrument que l'on veut employer.



On y fixe la planchette A à l'aide d'une coulisse adaptée au-dessous de celle-ci, et dans laquelle s'engage la planche A′ comme le montre notre figure.

60. *Pour rendre cette planchette horizontale*, on dispose le trépied en le fixant de manière que le disque g soit à peu près horizontal. On serre tous les écrous à l'exception de celui du boulon ee'. Sur la planchette, dont le plan est parallèle à dd', on place un niveau à bulle d'air parallèlement à cette ligne, et on fait tourner l'appareil autour de ee' jusqu'à ce que la bulle d'air s'arrête au milieu du niveau ; cette condition remplie, l'axe dd' est horizontal. On serre alors l'écrou du boulon ee', et on place le niveau perpendiculairement à sa première direction ; on desserre un peu l'écrou du boulon dd', et on fait tourner la planchette autour de cet axe dd' jusqu'à ce que la bulle d'air s'arrête au milieu du niveau ; on serre alors l'écrou du boulon dd'. Pendant ce dernier mouvement, dd' a conservé sa direction horizontale ; la ligne de la planchette sur laquelle posait en premier lieu le niveau

est donc demeurée horizontale. On a rendu horizontale une seconde ligne de la planchette perpendiculaire à celle-là. La planchette a donc été rendue horizontale (*).

60 *bis.* Une fois cette horizontalité obtenue, *on peut faire tourner la planchette à volonté sans altérer cette horizontalité ;* on desserre l'écrou du boulon *ba'*, qui est alors vertical, et on fait tourner la planchette avec la main autour de ce boulon.

LEVÉ A LA PLANCHETTE.

61. Le levé à la planchette peut se faire dans les mêmes cas et par les mêmes méthodes que le levé au graphomètre. Avec l'une comme avec l'autre, on emploie les jalons pour tracer les alignements nécessaires et la chaîne pour mesurer les longueurs qui doivent l'être d'après la méthode. Ce qui distingue le levé à la planchette, c'est que chaque angle est en même temps levé et rapporté sur la planchette qui est horizontale. Il n'y a plus qu'à marquer sur les lignes tracées, quand il y a lieu, les longueurs réduites des droites du terrain, puis à joindre convenablement les points relevés. Cela fait, le plan du terrain se trouve construit sur la planchette.

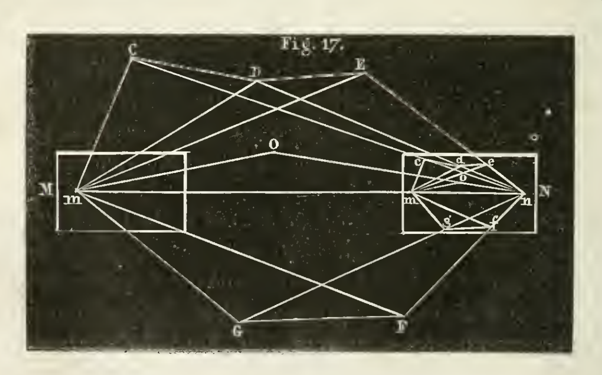
Nous savons tracer les alignements, mesurer les droites sur le terrain et les réduire à l'échelle ; pour savoir lever à la planchette, nous n'avons plus qu'à apprendre à *lever un angle.*

62. Levé d'un angle. *Mise en station de la planchette.* Supposons qu'il s'agisse de l'angle BAC de deux droites du terrain. On trace d'abord sur le papier une droite *ab* pour représenter l'un des côtés AB de l'angle, à moins que cette droite *ab* ne soit tracée d'avance, ce qui arrive souvent. Au point *a* choisi pour représenter le sommet A on plante perpendiculairement une aiguille très-fine. Puis on dispose alors la planchette à peu près horizontalement, de manière que le point *a* étant au-dessus du som-

(*) Un plan est horizontal quand il renferme deux horizontales non parallèles entre elles.

met A (ce qui s'obtient par le moyen du fil à plomb), la ligne *ab* du papier soit sensiblement au-dessus de la ligne AB du terrain. On assure alors les pieds de l'instrument dans le sol, et on travaille à rendre la planchette exactement horizontale, comme il a été expliqué. Cela fait, on place l'alidade sur la planchette, de manière que l'aiguille touchant la ligne de foi, celle-ci coïncide avec *ab*. Puis, au besoin, on fait tourner la planchette avec la main (n° 60 *bis*) jusqu'à ce que la ligne de visée rencontre un jalon B placé verticalement en un point de la direction AB. Alors le point *a* est sensiblement au-dessus de A et la ligne *ab* est la projection horizontale de AB sur la planchette; *celle-ci est mise en station.* Sans plus la déranger, on fait tourner dessus l'alidade, autour de l'aiguille, jusqu'à ce que la ligne de visée qu'elle détermine rencontre un jalon vertical C placé sur la direction AC du second côté de l'angle. On trace alors le long de l'arête interne de l'alidade une ligne *ac* qui est la projection de AC. L'angle *bac* est la projection horizontale de BAC, ce qu'on appelle l'angle BAC réduit à l'horizon.

63. Levé a la planchette. *Méthode des intersections.* Suppo-



sons qu'on veuille lever, au moyen de la planchette, le plan d'un contour polygnal MGFNEDC. On choisit sur le terrain une *base* MN, des extrémités de laquelle on puisse aisément apercevoir les points qui doivent être rapportés sur le plan; *on mesure cette base avec le plus grand soin.* Cela fait, en se guidant sur l'aspect du terrain, on trace sur le papier une ligne *mn* égale à MN réduite à l'échelle.

de manière que l'on puisse disposer de part et d'autre de cette droite *mn* tous les points remarquables du terrain situés de part et d'autre de MN. On met la planchette en station au point M, de manière que *m* soit verticalement au-dessus de M, et *mn* au-dessus de MN, comme il a été expliqué n° 62. Cela fait, on vise successivement de *m* les points à relever C, D, E, ... et on trace les droites *mc*, *md*, *me*.... Puis on transporte la planchette au point N, où l'on se met en station, de manière que *n* soit au-dessus de N et *nm* au-dessus de NM (n° 62). Cela fait, on vise successivement de *n* les points C, D, E,...G, déjà visés de *m*, et on trace successivement les lignes *nc*, *nd*, *ne*...*ag*. La ligne *nc* qui va de *n* au jalon C coupe la ligne *mc* au point *c*; *nd* coupe *md* au point *d*; etc. On joint les points *c*, *d*, *e*,.., de la même manière que leurs homologues C, D, E, sont joints sur le terrain. On a ainsi sur la planchette le plan *mgfnedc* du contour polygonal, à l'échelle adoptée (*).

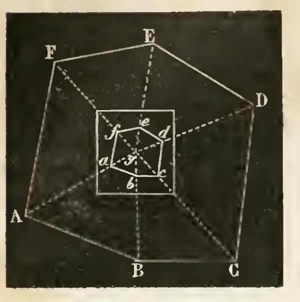
Levé d'un point quelconque. On lève et on rapporte un point quelconque, O, du terrain, comme on a levé et rapporté chacun des points C, D, E, etc. On vise dans les directions MO, NO, et on trace *mo*, *no*.

Nous rappellerons au lecteur les observations faites à propos de la méthode des intersections, n° 57.

64. *Méthode par cheminement.* Avec la planchette, comme avec le graphomètre, on substitue la *méthode par cheminement* à la méthode par intersections quand des habitations, des arbres, une forêt, ou d'autres obstacles, rendent cette dernière difficile ou impraticable. On se transporte successivement à chacun des sommets M, G, F, etc., du contour. Ayant levé la direction MG, on prend *mg* égal à MG réduite à l'échelle. Puis on se transporte en G, où on met *g* sur G et *gm* sur GM (n° 62); puis on vise dans la direction GF et on trace *gf* = GF réduite à l'échelle. En F, on met *f* sur F et *fg* sur FG; puis on vise FN et on trace *fn* = FN réduite; etc.

(*) Les figures MGFNEDC, *mgfnedc* sont semblables (V. la note de la p. 7).

64 *bis*. Rayonnement. Tous les points à relever A, B, C,... sont visibles d'un point intérieur g, et on peut mesurer sans difficulté les distances gA, gB, gC, etc. Dans ce cas, ayant mesuré ces distances, on met la planchette en station au point g et on vise successivement les points A, B, C, ... On prend sur la direction gA une longueur $ga = g$A réduite à l'échelle, puis gb égale à gB réduite, etc. Enfin on joint les points a, b, c, comme les point A, B, C,... sont joints sur le terrain.



65. Usages de la planchette. Nous avons signalé tout d'abord, n° 61, l'avantage que présente la planchette de donner immédiatement sur place le plan à construire, sans aucune opération de cabinet.

On se contente quelquefois de ce travail; mais le plus souvent ce premier dessin n'est qu'un *plan minute* qu'on met au net dans le cabinet, en se servant de la règle, de l'équerre, du compas et du rapporteur. On le reproduit dans les mêmes proportions, ou à une autre échelle, suivant les convenances.

La planchette est d'un usage fréquent, on pourrait dire général, dans le levé des plans; on l'emploie même quand on croit devoir, pour plus de précision, employer le graphomètre à la détermination des angles, ou bien l'équerre d'arpenteur au levé d'une courbe. La planchette sert alors de table de travail sur le terrain; on y rapporte, à l'aide de la règle, de l'équerre, du compas et du rapporteur, les longueurs réduites à l'échelle et les angles mesurés avec le graphomètre. On obtient ainsi un *plan minute* qui remplace avec avantage le croquis ou dessin fait à vue d'œil et à main levée. Le plus grand avantage qu'offre la planchette, c'est qu'on peut, par des constructions auxiliaires *qu'on ne reproduit pas sur le net*, faire sur le terrain des vérifications par lesquelles on s'assure, dans le cours même des opérations, de l'exactitude de tous les détails qui constituent le plan définitif.

Nous parlerons plus tard de ces vérifications quand nous traiterons la question générale du levé d'un plan quelconque.

BOUSSOLE D'ARPENTEUR ; DÉCLINATOIRE (*).

66. Propriété de l'aiguille aimantée. On sait qu'une aiguille aimantée mobile sur un pivot vertical prend une direction constante qui est sensiblement la même dans une grande étendue de terrain. L'une de ses pointes se dirige, non pas précisément vers le nord, mais à 20° environ du nord, vers l'ouest (**).



La direction S'ON' de l'aiguille aimantée en un lieu O s'appelle, pour abréger, la *méridienne magnétique du lieu*. L'extrémité N', voisine du nord N, s'appelle le *nord magnétique;* l'angle NON' est la *déclinaison magnétique*. SON est la ligne sud-nord ordinaire (la méridienne astronomique).

67. Azimut magnétique. Soit OA une droite du terrain considérée seulement dans le sens OA. On appelle *azimut magnétique* de cette ligne l'angle N'OA qu'elle fait avec ON', cet angle étant compté *de* N' *vers* OA *en tournant vers l'ouest* (suivant l'arc N'A). Cet azimut peut varier de 0° à 160°; l'azimut de la ligne OB est mesuré par l'arc N'AB.

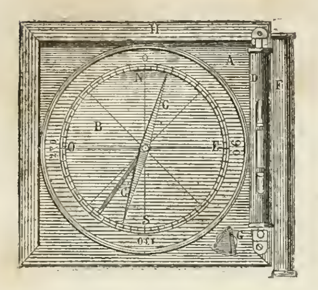
La position et le sens d'une droite OA qui passe par un point donné O sont évidemment déterminés par son azimut magnétique. Cet azimut se détermine au moyen de la boussole.

68. Boussole d'arpenteur. Cet instrument se compose d'une boîte carrée, portée comme le graphomètre à l'aide d'une douille

(*) La boussole d'arpenteur étant d'un usage fréquent et commode, nous décrivons cet instrument et ses applications avec autant de soin et de détail que les autres, quoiqu'il n'en soit pas question dans le programme officiel.

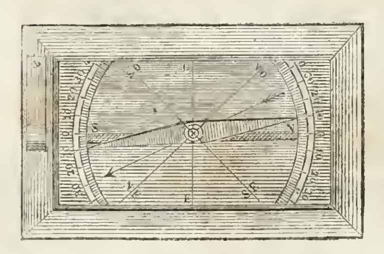
(**) Cet angle varie avec le temps, mais lentement; il va actuellement en diminuant; il n'est pas non plus le même en tous lieux. Nous donnons sa valeur actuelle *pour Paris*, prise dans l'*Annuaire* du bureau des longitudes de France. Il est d'ailleurs très-facile de mesurer en tout lieu cet angle NON'.

sur un genou à coquille et un pied à trois branches. Au centre et au fond de cette boîte est implanté perpendiculairement un petit pivot d'acier qui supporte, à l'aide d'une chape en agate, une aiguille aimantée. Quand la boîte tourne autour de son centre, les pointes de l'aiguille parcourent un cercle tracé sur le fond autour du pivot, et divisé de 0° à 360°, *de gauche à droite pour un observateur placé au centre.* La ligne 0°——180° qui porte le nom de *ligne de foi* est parallèle à un des côtés de la boîte. Le long de ce côté est disposée une alidade à pinnules ou à lunette qui peut tourner autour d'un axe situé dans le prolongement du diamètre 270°——90°. Cette alidade sert à viser dans une direction parallèle au plan vertical qui passe par la ligne de foi.



La boussole est fermée par une vitre transparente, et peut être recouverte par une plaque de bois qui entre à coulisse dans la boîte carrée. Une petite tige, que l'on met en mouvement de l'extérieur par un mécanisme très-simple, peut soulever l'aiguille et la presser contre la vitre, afin de la maintenir et de ménager le pivot quand on ne se sert pas de la boussole.

69. *On rend la boussole horizontale* de la même manière que le graphomètre ou la planchette. Pour plus de précision, on se sert quelquefois, à cet effet, de deux niveaux à bulle d'air placés sur la boussole parallèlement aux diamètres 0°——180° et 270°——90° (n° 58). La disposition de l'aiguille indique d'ailleurs quand la boussole est à peu près horizontale.



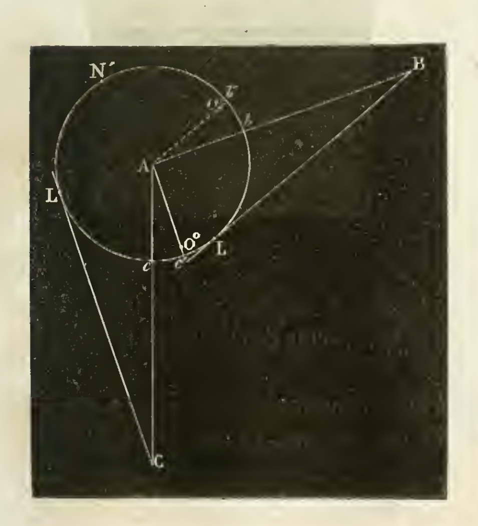
70. Déclinatoire. Le déclinatoire est une boussole rectangulaire renfermant une aiguille aimantée mobile sur un pivot perpendiculaire au fond de la boîte. Ce fond est simplement divisé en son milieu par une droite parallèle aux

longs côtés du rectangle. Il résulte de cette disposition que, lorsque cette ligne intérieure, qu'on appelle *ligne de foi*, est amenée au-dessous des pointes de l'aiguille, le long côté de la boîte a la direction de la méridienne magnétique du lieu. Le déclinatoire, comme la boussole, est recouvert d'une vitre; une plaque de bois entrant à coulisses dans la boîte sert à la fermer quand on ne s'en sert pas. Cet instrument à fond plat et sans douille se pose ordinairement sur la planchette.

Pour plus de rapidité dans la manœuvre de l'instrument, on a tracé aux deux extrémités de la *ligne de foi* deux arcs divisés, décrits du pivot comme centre. Ils sont gradués semblablement 0° à chaque extrémité de la *ligne de foi*, de 0° à 40° vers la droite; de même à gauche. La ligne de foi est parallèle au méridien magnétique quand l'aiguille fait des oscillations égales de part et d'autre du zéro.

USAGES DE LA BOUSSOLE.

71. *Déterminer l'azimut d'une droite* AB *du terrain.* L'observateur, placé en A et tourné vers un jalon ou signal situé en B, dispose devant lui la boussole bien *horizontalement*, de manière que le centre étant sur la verticale d'un point A de AB et l'alidade *à droite*, il puisse viser le jalon B à travers celle-ci. On met la boussole en station comme il a été expliqué pour le graphomètre et pour la planchette. Quand le fil de la croisée ou du réticule se projette bien sur le jalon, on regarde le limbe; la



division sur laquelle se trouve la pointe nord N' de l'aiguille aimantée en repos indique l'azimut cherché N'Lo° ou N'Lb'.

72. Remarque. L'azimut de AB n'est pas précisément N'Lb' mais N'Lb; en lisant suivant notre règle on commet donc une erreur *en plus* égale à l'arc bb' qui mesure un angle égal à ABL. Cette erreur est d'autant plus petite que le signal visé B est plus éloigné de la station A.

On ne se préocupe pas, en général, de cette erreur qui est détruite par la compensation dans la mesure d'un angle par la boussole (n° 73, Rem.), et qui importe peu dans les autres usages de cet instrument.

73. *Déterminer avec la boussole l'angle* BAC *de deux droites du terrain.*

Ayant disposé la boussole bien horizontalement au-dessus du sommet A, on détermine successivement les azimuts magnétiques $n'b$, $n'bc$ des droites AB, AC. La différence de ces azimuts





est l'angle cherché ($n'bc - n'b = bc$). Il peut arriver (2e figure) que la différence obtenue surpasse 180°; dans ce cas il faut retrancher cette différence de 360° (*).

Remarque. Les erreurs $b'b$ et $c'c$ commises sur les azimuts de AB et de AC (n° 72) étant de même sens, se détruisent dans la

(*) $bc = cn' + n'b = 360° - n'bc + n'b$, ce qui est la même chose que $360° - (n'bc - n'b)$.

soustraction. L'arc $b'c'$ déterminé suivant notre règle est égal à bc (la distance AB étant sensiblement égale à AC).

74. *Erreur de lecture.* La boussole ne donne pas les angles avec la même précision que le graphomètre. Cela tient à ce que l'alidade de celui-ci est munie d'un vernier, tandis que la boussole n'en a pas et ne peut en avoir; de plus, la vacillation de l'aiguille gêne pour mesurer avec précision. On ne peut donc guère évaluer les angles avec la boussole qu'à un demi-degré près. C'est pourquoi on ne se sert pas de cet instrument quand on a besoin de mesurer les angles avec une assez grande précision.

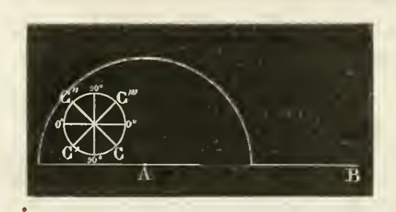
75. Orientation d'un plan. On dispose d'habitude le plan de manière que le nord soit au haut du papier, le sud en bas, l'est à droite, et l'ouest à gauche. Pour qu'il en soit ainsi, on commence par tracer, au crayon, de haut en bas du papier, parallèlement à ses bords supposés parallèles et bien dressés, une droite qui doit figurer la ligne nord-sud (la méridienne astronomique) (faites une figure). A partir d'un point quelconque de cette ligne on trace de bas en haut, et sur la gauche, une seconde droite l, faisant avec la première un angle égal à la déclinaison magnétique du lieu (à Paris 20°). Cette ligne représente sur le plan la méridienne magnétique. Cela fait, il suffit qu'on ait déterminé, à l'aide d'une boussole, l'azimuth magnétique de la droite AB du terrain qui doit être rapportée la première sur le plan. Ayant choisi un point a du papier pour point de départ de cette droite, on trace sur ce point une ligne l' parallèle à l, et de même sens que cette ligne. Puis on trace, à partir de a, une seconde droite ab faisant avec l' un angle égal à l'azimut trouvé, cet angle étant mesuré de droite à gauche à partir de la ligne l' (n° 67). On prend sur ab la longueur réduite de la ligne AB du terrain. Après cela on continue à rapporter le plan sans boussole, suivant la méthode adoptée.

Il est clair que la première ligne tracée parallèlement aux bords du terrain a, par rapport à ab, la même position que la ligne nord-sud du terrain par rapport à AB. Le nord du terrain est donc représenté au haut du papier, le sud en bas, etc.; en un mot, le plan est *orienté*.

76. Boussole du graphomètre. Pour servir à l'orientation du

plan, le graphomètre porte ordinairement une petite boussole enfermée dans une boîte cylindrique fixée au limbe, au-dessous du plan de cercle gradué et fermé par un verre transparent. Cette boussole est pareille à celle que nous avons décrite, considérée à l'intérieur de la boîte; seulement chacun des quadrants du limbe a sa division particulière de 0° à 90°, comme notre figure l'indique.

Pour déterminer l'azimut d'une ligne AB du terrain, on met le graphomètre en station au point M de manière que la ligne de visée de l'alidade fixe passe par le point B; puis on regarde sur quelle division du limbe passe la pointe *nord* de l'aiguille aimantée; supposons que ce soit la division 64°.



Comme il y a quatre divisions portant ce numéro, la pointe peut occuper l'une des quatre positions C, C', C'', C'''. La ligne 0°——0° du limbe a la même direction que AB.

1° Si la pointe est en C, l'azimut de AB est évidemment 64°.

2° Si elle est en C', l'azimut est 180° — 64° ou 116°.

3° Si elle est en C'', l'azimut est 180° + 64° ou 244°.

4° Enfin, si la pointe est en C''', l'azimut est 360° — 64° ou 296°.

77. Usage du déclinatoire. On se sert du déclinatoire pour orienter un plan levé à la *planchette*. On trace d'abord au crayon la ligne nord-sud, de haut en bas du papier et parallèlement à ses bords, puis à gauche et de bas en haut une ligne *l* faisant avec la première un angle égal à 20° (nº précédent). Cela fait, à la 1re station, une fois la planchette mise au point et rendue horizontale (nº 58 ou 60), on pose dessus le déclinatoire, en faisant coïncider un des longs côtés de la boîte avec la ligne *l*. Puis on fait tourner la planchette autour de la verticale du point de station (nº 60 *bis*) jusqu'à ce que la ligne de foi du déclinatoire qui tourne avec la planchette, soit précisément au-dessous des pointes de l'aiguille aimantée.

La méridienne magnétique du papier coïncidant alors avec la méridienne magnétique du lieu, il n'y a plus qu'à viser, sans plus

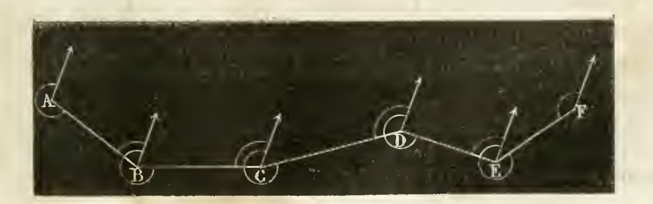
déranger la planchette dans la direction ou dans les directions qui, partant du point de station, doivent être rapportées sur la planchette. Ces lignes tracées, on continue le levé comme il a été indiqué sans se servir du déclinatoire.

78. Remarque. Quand le plan doit être orienté, on ne peut plus choisir tout à fait arbitrairement sur le papier la direction de la première ligne, *base* ou autre, rapportée sur le plan, cette direction étant fixée par l'azimut de cette ligne, autrement dit par un angle qu'elle doit faire avec la ligne *l* du papier. Mais on peut choisir le point de départ de cette ligne, et on le choisit de manière que tous les objets à représenter puissent être convenablement placés sur le papier.

79. Rendre la planchette parallèle a elle-même. La planchette transportée d'une station à une autre, doit toujours être rendue parallèle à sa précédente position, c'est-à-dire que toutes les droites qui y sont tracées doivent être parallèles à leurs positions antérieures. On réalise aisément cette condition en se servant du déclinatoire.

Pour cela on fait tourner le déclinatoire sur la planchette rendue horizontale de manière que la ligne de foi soit sous les pointes de l'aiguille aimantée (n° 60 *bis*); on trace alors une droite *l* suivant un des longs côtés de la boîte. Cela fait, la planchette transportée à une autre station quelconque sera parallèle à elle-même, dès que, le déclinatoire longeant la même ligne *l*, la ligne de foi aura été amenée sous les pointes de l'aiguille, comme à la 1re station. La ligne *l* étant ainsi constamment parallèle à elle-même, il en est de même de toutes les lignes tracées sur la planchette.

80. Levé a la boussole. La boussole servant à mesurer les an-



gles, on peut lever à la boussole, comme au graphomètre ou à la planchette par toutes les méthodes, excepté par celle des perpendiculaires. Mais on emploie préférablement la méthode par *cheminement*.

Levé du plan. Supposons qu'il s'agisse d'un contour rectiligne plus ou moins sinueux. On met la boussole en station à un premier sommet A; on y mesure l'azimut du 1er côté AB et on l'enregistre. On mesure la ligne AB. Arrivé au point B, on y détermine l'azimut de la droite BA et celui de la droite BC, et on les enregistre; l'azimuth de AB et celui de BA doivent différer de 180° (V. la fig.). On mesure BC. On détermine au point C l'azimut de CB et celui de CD qu'on enregistre; (vérification : azim. BC — azim. CB = 180° :) Ainsi de suite (*).

CONSTRUCTION DU PLAN. Il est commode, quand on lève à la boussole, de tracer sur le papier à l'encre rouge et très-légèrement une série de parallèles l, l,.. à la direction de la méridienne magnétique, que l'on trace une première fois à côté de la ligne nord-sud comme il a été expliqué n° 75. Cela fait, on choisit le point de départ a de la première droite à rapporter, AB par ex., de telle sorte que tous les détails du plan puissent être convenablement placés sur le papier. Au point A on mène une ligne faisant avec une des lignes l, de droite à gauche (n° 67), un angle égal à l'azimut de AB. On prend sur la nouvelle droite une longueur ab égale à AB réduite à l'échelle. Au point b on trace de même une droite faisant avec une des lignes l un angle égal à l'azimut de BC; on prend sur la nouvelle droite une longueur bc égale à BC réduite. Ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait rapporté tous les sommets et les lignes relevées.

On rattache un point quelconque O à une base BC comme on a rattaché B à A. On tire BO et on relève cette ligne de même que AB ou BC.

80 *bis*. USAGE DU LEVÉ A LA BOUSSOLE. On emploie la boussole lorsque ne tenant pas à une grande précision, on veut procéder plus vite. On l'emploie de préférence pour lever le plan des terrains embarrassés

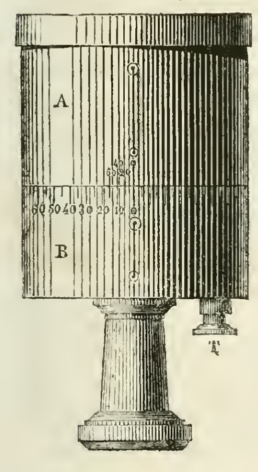
---

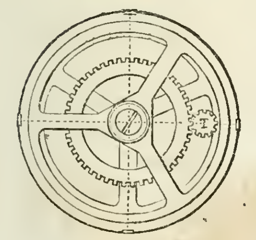
(*) Quand on veut opérer avec promptitude sans se préoccuper de la vérification, on peut faire deux fois moins de stations. On passera de A en C ou on mesurera l'azimut de BC et celui de CD; puis de là en E, etc.

d'obstacle qui gênent la vue dans beaucoup de directions. Ainsi on lève à la boussole les sentiers d'un bois, les détours et les galeries d'une mine. On se sert même exclusivement de la boussole dans ce dernier cas.

Les opérations se font plus vite avec la boussole, parce qu'on la met plus promptement en station que le graphomètre. On n'a pas non plus besoin de se placer au sommet d'un angle pour le déterminer; car on peut choisir sa station en un point quelconque de chaque côté pour en déterminer l'azimut.

81. Pantomètre ou *équerre graphomètre.* On se sert encore pour mesurer les angles d'un instrument qui peut remplacer à la fois l'*équerre*, le *graphomètre* et la *boussole.* Cet instrument, nommé *pantomètre*, ressemble par sa structure générale à une équerre d'arpenteur; un peu plus gros que l'équerre, il se compose de deux tambours cylindriques dont l'un inférieur B s'emmanche par une douille sur un bâton ou sur un pied à trois branches, et dont l'autre supérieur A peut tourner autour d'un axe qui lui est commun avec le premier. Le tambour fixe B se termine supérieurement par une couronne argentée divisée en 360 degrés; le tambour A se termine de même inférieurement par une couronne sur laquelle on a tracé un vernier d'une étendue de 29° partagée en 30 parties égales. L'approximation obtenue dans la mesure des angles est donc $\frac{1}{30}$ de degré ou 2′ (n°s 52 et 53). Des pinnules semblables à celles de l'équerre sont percées dans le tambour supérieur dans deux directions perpendiculaires entre elles; la fente étroite de l'une de ces pinnules est située au-dessus du zéro du vernier. Deux pinnules semblables pratiquées dans le tambour inférieur B correspondent aux divisions 0° et 180° de la couronne.





Enfin le tambour mobile porte une boussole sur sa face supérieure.

Pour mener une perpendiculaire à une droite donnée en un point donné, on installe verticalement le *pantomètre* au point donné; puis on fait tourner le tambour supérieur A jusqu'à ce que l'une des lignes de visée coïncide avec la droite donnée (V. n° 37). Visant ensuite par les deux autres pinnules du même tambour, on fait placer un jalon sur la direction visée.

Quand on veut mesurer un angle, on installe verticalement le pantomètre au sommet en dirigeant la ligne de visée du tambour fixe B suivant l'un des côtés de l'angle. Puis on fait tourner le cylindre mobile A jusqu'à ce que la ligne de visée qui correspond au zéro du vernier ait la direction de l'autre côté. L'angle se lit alors sur la couronne et sur le vernier, le nombre de degrés sur la couronne immédiatement avant le zéro du vernier dans le sens de la graduation, et le nombre des minutes sur le vernier à l'endroit de la coïncidence des traits. (Les traits du vernier sont numérotés 0, 2, 4, 6, ..., jusqu'à 60).

Pour imprimer un mouvement doux au cylindre supérieur, on a disposé à l'intérieur une roue dentée qui engrène avec un pignon porté par une tige verticale traversant le cylindre inférieur de bas en haut. Cette tige est terminée inférieurement par un bouton T; quand on fait tourner ce bouton avec la main, le tambour A tourne doucement. Ce mécanisme permet d'amener avec facilité et précision la ligne de visée du tambour A sur une droite donnée du terrain, soit qu'il s'agisse de lui mener une perpendiculaire, soit qu'il s'agisse de mesurer l'angle qu'elle fait avec une autre ligne.

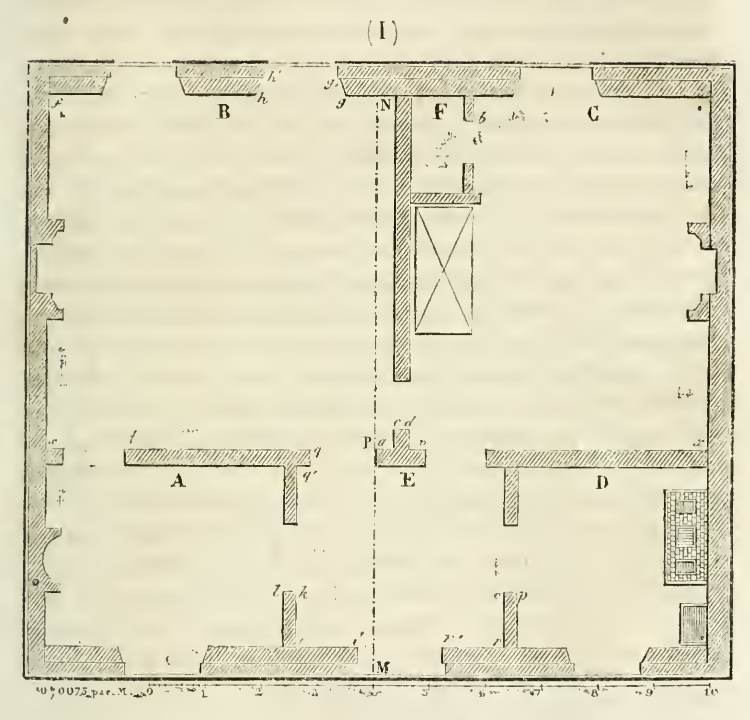
Le pantomètre peut donc remplacer avec avantage l'équerre dans les levés et dans l'arpentage, et le graphomètre pour mesurer les angles horizontalement.

32. Les notions précédentes suffisent pour lever un plan quelconque; car un levé, si compliqué qu'il soit, ne consiste que dans la répétition des opérations élémentaires que nous venons d'apprendre à effectuer avec les divers instruments. Il ne nous reste plus qu'à faire quelques applications, à traiter avec détail un certain nombre d'exemples pour donner au lecteur une idée de l'ensemble des opérations qui constituent un levé ordinaire, et de la manière dont ces opérations se suivent et s'enchaînent.

APPLICATIONS DIVERSES.

83. Plan d'un appartement.

(I)



E *Antichambre.*
A *Salle à manger.*
D *Cuisine.*
B *Salon.*
C *Chambre à coucher.*
F *Cabinet de toilette.*

Ce plan se lève au mètre et par cheminement (avec la roulette ou un ruban métrique quelconque).

L'échelle de réduction est de 0m,0075 par mètre. On commence par construire l'échelle du plan comme il est indiqué n° 28. 2e exemple. Chacune des grandes divisions de l'échelle compte pour un mètre, et chacune des petites, entre 0 et 1, pour un décimètre.

On fait le levé des différentes pièces successivement; nous commencerons par le salon. L'opération est bien simple; on suit en cheminant les traces des cloisons et des murs sur le parquet, et on relève le contour qu'elles forment avec ses sinuosités aux croisées et autour de la cheminée. MPN est un axe perpendiculaire au mur de façade passant au coin P de la porte du salon. Ayant tracé cet axe, on mesure la distance Pa, puis à partir de a la longueur de la pièce, en notant en chemin la distance ac et la largeur de la porte. On prend sur l'axe une longueur PN égale à la longueur totale mesurée à l'échelle du plan (n°s 28 et 30) (comme toutes celles qui vont être rapportées) (*). On mène au point P sur PN une perpendiculaire égale à Pa, puis à partir de a une ligne égale et parallèle à PN, sur laquelle on marque la longueur ac, puis la porte figurée par une interruption. Continuant à cheminer, on mesure le long du mur de façade la longueur du panneau depuis le coin jusqu'au point g, puis l'angle g qui n'est pas droit (n° 31) (**); ensuite gg', $g'h'$, $h'h$, puis l'angle h, etc., jusqu'au point f. On rapporte ensuite tous ces détails sur le plan comme il est indiqué en commençant par mener une perpendiculaire Ng à DN, etc. Ayant construit la ligne $g'h'$ parallèle à Ng, on lui élève en g' et en h' deux perpendiculaires sur lesquelles on marque l'épaisseur du mur (mesurée à l'appui de la croisée); puis par les extrémités de ces perpendiculaires on mène une parallèle à Ngh qui marque la trace extérieure du mur, dont l'épaisseur *totale* se trouve ainsi figurée (***). On mesure de même toutes les lignes du point f au point s sur le mur de gauche, en suivant sur le parquet et sur le

(*) C'est-à-dire que chaque longueur rapportée sur ce plan se compose d'autant de grandes divisions de l'échelle du plan qu'il y a de mètres dans la longueur mesurée sur le parquet, et d'autant de petites divisions qu'il y a de décimètres, etc. V. d'ailleurs, n°s 28 et 30, la manière de faire usage de l'échelle d'un plan.

(**) Pour mesurer un angle tel que g dont on ne peut suivre que le relief, on prolonge l'un des côtés Ng, et on mesure l'angle supplémentaire, comme il est indiqué n° 31.

(***) Cette trace extérieure est prolongée au delà de f; d'après une mesure prise extérieurement à gauche de la seconde croisée; c'est ainsi qu'on a pu, en traçant une parallèle extérieure à fs, figurer l'épaisseur du mur de gauche

carreau le contour de la cheminée à l'extérieur et à l'intérieur. Puis, élevant une perpendiculaire à *hf*, on rapporte tous ces détails sur le plan comme on le voit sur notre figure. Enfin, on mesure et on rapporte de même avec les ouvertures des portes le quatrième côté du salon, de *s* à P.

On passe ensuite dans la chambre à coucher après avoir mesuré à la porte en *c* l'épaisseur du mur, et marqué cette épaisseur sur deux petites perpendiculaires telles que *cd*, des deux côtés de la porte. On mène par le point *d* une ligne égale et parallèle à PN (à partir de *v* vis-à-vis de *a*), en laissant la place de la porte. Cela fait, on lève et on rapporte le plan de la chambre C et du cabinet F, comme celui du salon, en cheminant sur le parquet le long des cloisons et des murs. (*V.* la fig.)

Du salon, on passe dans l'antichambre en mesurant en P ou en *q* l'épaisseur du mur de séparation. Ayant marqué cette épaisseur *qq'*, on mène une parallèle à *Sax*, sur laquelle on laisse les trois ouvertures de porte. Enfin, on lève et on rapporte successivement le plan de l'antichambre, celui de la salle à manger et celui de la cuisine, exactement comme on a levé ceux du salon et de la chambre.

L'axe MPN, prolongé à l'extrémité au delà de l'entrée M, peut servir à rattacher le plan de l'appartement à un plan plus général. Par exemple, il y a deux ou plusieurs appartements de plein pied, ou bien l'appartement est au rez-de-chaussée, et on veut rattacher son plan à celui des détails extérieurs.

84. 2e Exemple. Plan d'un jardin (*levé au mètre*).

Ce levé a été fait par cheminement et par la méthode des perpendiculaires à l'échelle de $0^m,002$ par mètre. On commence par construire l'échelle du plan : $0^m,002$ par mètre c'est 2 centimètres pour 10 mètres; on marque sur une droite plusieurs longueurs de 2 centimètres chacune avec les numéros 0,10, 20, 30, 40, etc. A gauche du 0, on fera bien de marquer une longueur supplémentaire de 2 centimètres divisée en dix parties égales, qui compteront chacune pour 1 mètre.

On relève d'abord le périmètre intérieur du jardin en cheminant le long des murs; les angles se déterminent et se rapportent comme il a été indiqué n° 31 (levé au mètre). On rapporte ce contour sur

le plan en mesurant toutes les longueurs à l'échelle (n° 28) (*V.* sur la figure ce contour 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8). Puis on trace et on mesure l'axe AB de l'allée principale que l'on rapporte sur le plan après avoir déterminé le point A par ses distances aux points 1 et 8 du contour. On relève de même l'axe MN de la première allée transversale; cet axe est perpendiculaire à l'axe AB au point O, que l'on détermine par la distance AO. Cet axe construit, on peut vérifier les points M et N où il rencontre le contour principal en mesurant les distances M (1) et N (8), sur le plan et sur le terrain. Du point O partent les axes des deux autres allées qui vont aboutir aux sommets 2 et 7 du contour; on les relève aisément; on peut, pour vérification, mesurer les angles de ces axes avec OB. De C en D il y a encore une allée principale facile à marquer. On mesure et on relève de même les axes de toutes les allées dirigées en lignes droites. Ces axes servent au levé des détails que l'on fait par la méthode des perpendiculaires. Ces perpendiculaires généralement courtes se mènent à l'aide d'un cordeau et de deux piquets, ou tout simplement avec un ruban métrique tenu par deux personnes (*). Nous n'avons pas besoin de nous étendre sur ce levé des détails. Les constructions indiquées sur notre figure indiquent suffisamment au lecteur en quoi elles consistent. On relève chaque droite en relevant deux de ses points; chaque courbe en projetant un nombre suffisant de ses points sur l'axe le plus voisin et le plus commodément placé. (*V.* le levé à l'équerre.)

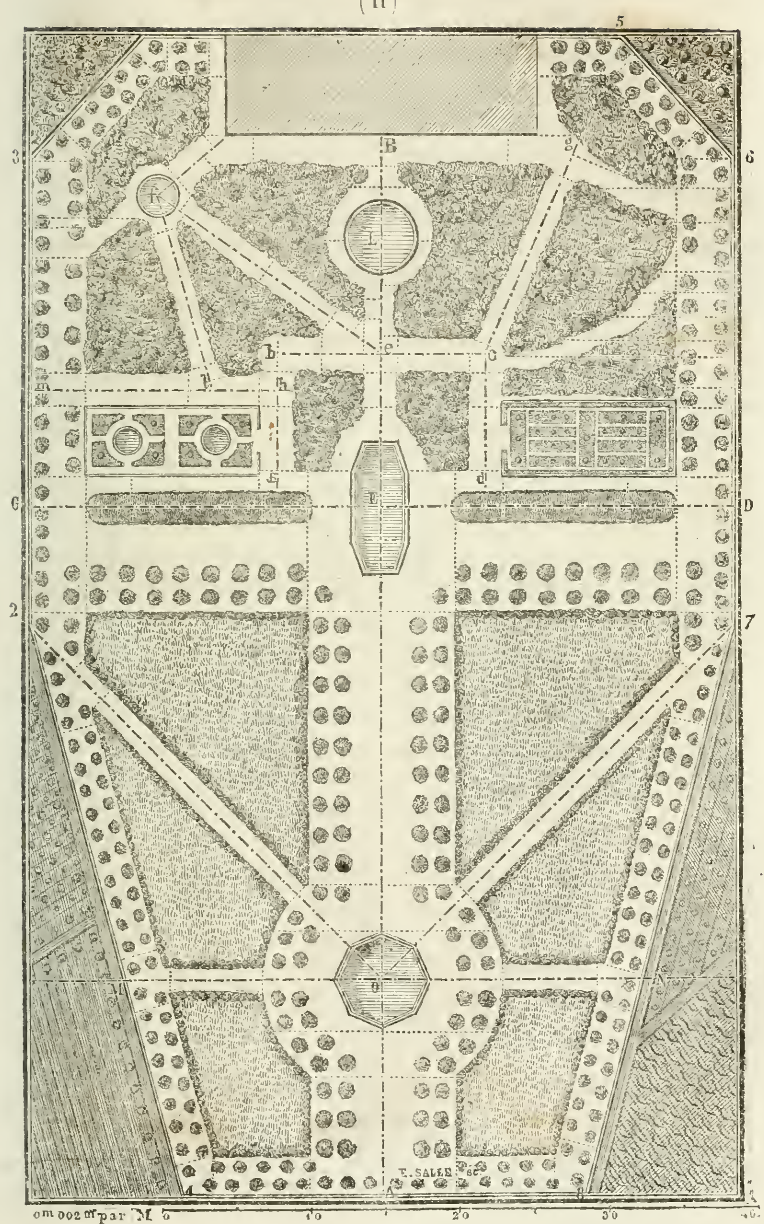
85. *Levés de plans d'une certaine étendue.*

Polygones topographiques. Pour lever un plan d'une certaine étendue, on choisit à l'avance sur le terrain un certain nombre de bases auxquelles on puisse rattacher commodément tous les points et les détails importants. On choisit ordinairement ces bases consécutives et formant un polygone inscrit ou circonscrit au terrain, ou bien plusieurs polygones qui, reliés les uns aux autres, suivent les contours ou embrassent les détails et les points qui doivent être

---

(*) Le cordeau étant *tendu* perpendiculairement d'un point à une droite, on peut vérifier sa position comme il suit : on fait un peu tourner le cordeau autour du piquet à droite ou à gauche ; l'extrémité qui touche la droite doit rester en deçà de celle-ci ; si elle passe au delà , c'est que le cordeau était oblique ; on le raccourcit et on rectifie sa direction.

(II)


5
3
6
B
K
L
g
b
e
c
m
f
h
d
G
E
D
2
7
0
M
N
E. SALLE sc.
A
0m 002mm par M. 0
10
20
30
40

relevés. Ces polygones sont ce qu'on appelle des polygones *topographiques*. (*V.* le contour du jardin et les plans suivants.)

Le levé d'un plan doit commencer par le levé du polygone ou des polygones topographiques que l'on effectue avec le soin le plus minutieux par l'une des méthodes que nous connaissons. On marque ordinairement les sommets de ces polygones par des jalons, et souvent encore par de petits piquets qui, les jalons enlevés, restent dans le sol; de cette manière si le levé se fait à diverses reprises, on retrouve aisément ces points importants. D'ailleurs on choisit ces sommets de manière qu'ils puissent être aisément repérés, c'est-à-dire rattachés à des points du terrain remarquables par quelque objet qui s'y trouve à demeure, et aisément reconnaissables. Enfin on ne commence le levé des détails qu'après s'être assuré par des vérifications préalables, effectuées par exemple à la planchette, de l'exactitude de ces opérations préliminaires. On voit par ex. : si le polygone ferme bien (*V.* la fin du n° 31); on vérifie si la somme des angles est exacte; on détermine les mêmes sommets de plusieurs manières, etc.

Le réseau topographique construit et vérifié, on se sert de ses côtés comme d'autant de bases pour lever et rapporter les détails et les points importants comme on l'a déjà vu dans le jardin, comme on le voit dans les plans suivants. Au besoin, pour se rapprocher de certains points, de certains détails importants, on complète le réseau par des bases auxiliaires nommées *traverses* qui vont d'un point à un autre du réseau topographique principal. Tels sont les axes des allées du jardin, la droite qui joint (1) à (5) planche III, les lignes *defg*, B*no*, etc., planche IV.

Un pareil levé doit être fait avec beaucoup d'ordre et de netteté. Il est bon, en général, de subdiviser le travail préparatoire, c'est-à-dire de faire des croquis séparés (n° 4) des parties principales du terrain, de ce qui se rapporte à chaque polygone, et même à chaque base importante par son étendue ou par le grand nombre de mesures qui s'y rattachent. Ces croquis annotés, sur lesquels sont indiquées toutes les mesures, servent à construire le plan d'ensemble.

86. PLAN D'UNE PROPRIÉTÉ *limitée en partie par une rivière.*

L'échelle de réduction est $\frac{1}{5000}$, soit $0^m,002$ pour 10 mètres. On

peut se servir pour ce plan de l'échelle décimale indiquée n° 29 précisément construite dans ces conditions. On peut aussi tracer une échelle de plan ordinaire, c'est-à-dire une droite divisée en longueurs de 2 millimètres numérotées 0, 10, 20, 30, 40...

Nous avons choisi une base principale sur la route inférieure qui va du pont à la limite de la propriété près du bois. A cette base se rattachent consécutivement d'autres bases placées à proximité des sentiers, des sinuosités de la rivière, et du contour du terrain qu'elles doivent servir à relever. Ces bases forment un polygone topographique dont les sommets sont indiqués par les numéros 8, 3, 4, 5, 6, 7. Il y a de plus une traverse (1) (5) sur la route supérieure qui va d'un pont à l'autre.

Pour lever le polygone topographique on a mesuré la base principale (8) (3), et relevé au mètre le côté (8) (7). On a levé les sommets (4) et (5) au graphomètre (ou à la planchette) par la méthode des intersections en prenant pour base PQ (1,2) sur la base principale (8) (3). Les côtés (5) (6) et (6) (7) ont été levés à l'équerre.

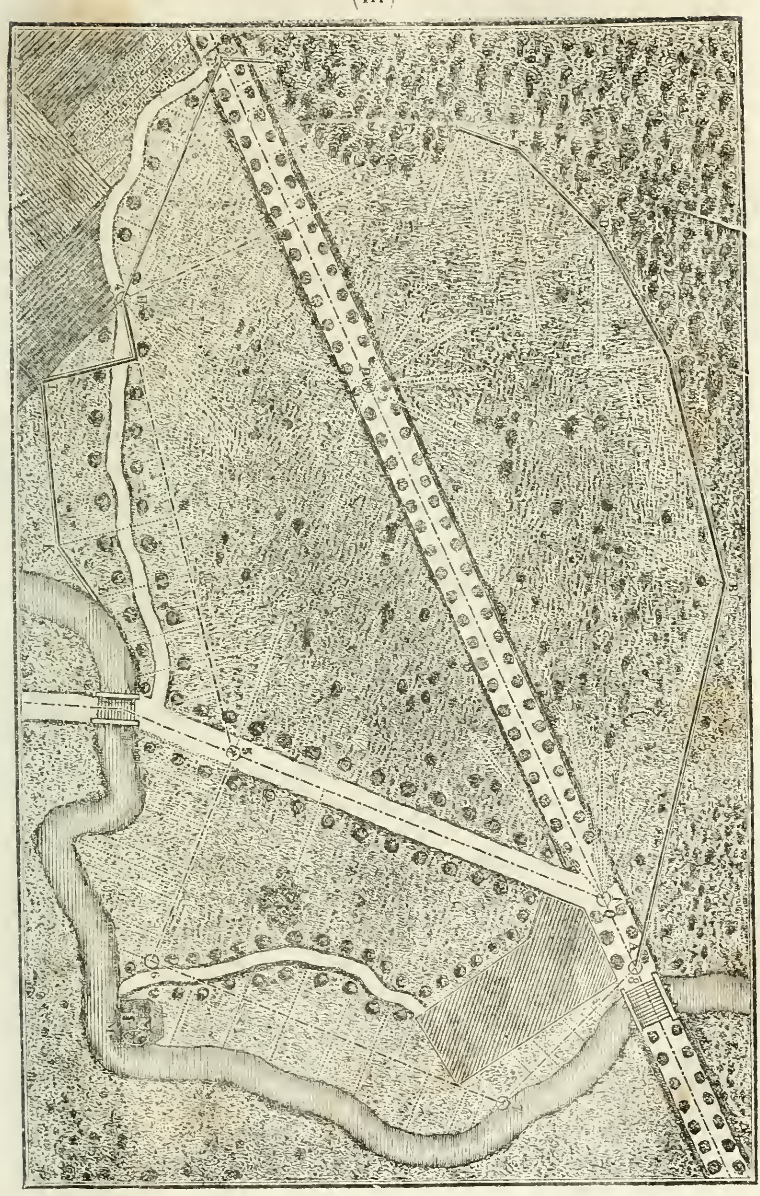
La figure indique suffisamment comment les détails ont été relevés à l'aide de ces bases. Les points A, B, C, D, E, F du contour de la propriété ont été relevés à la planchette ou au graphomètre, par la méthode des intersections, la base choisie étant PQ ou (1,2) (sur la base principale). Tous les autres points remarquables, les sinuosités de la rivière et des sentiers, le contour du bois ont été relevés à l'équerre. Nous n'avons fait qu'indiquer en gros le contour de l'enclos qui renferme la ferme, les bâtiments d'exploitation et des jardins. Cette masse de bâtiments et de jardins peut d'ailleurs se rattacher très-aisément au polygone topographique, et être relevée comme le village de la planche suivante.

87. *Remarque.* Nous répéterons ici que les sommets du polygone topographique peuvent être repérés d'après leurs distances à certains angles, à certains points de la maison, du pont, du moulin, ou à certains arbres, à certaines bornes ou grosses pierres très-visibles, en résumé à des signaux permanents dont on prend note sur le plan ou sur un carnet.

88. 4ᵉ EXEMPLE. PLAN D'UN VILLAGE *et de son territoire.*

On enferme le village dans un polygone topographique qu'on relève d'abord au mètre, ou à la boussole, ou à la planchette. Puis

(III)



on s'aide de ce polygone, et au besoin de traverses telles que *defg* pour lever le plan du village au mètre et à l'équerre ou autrement.

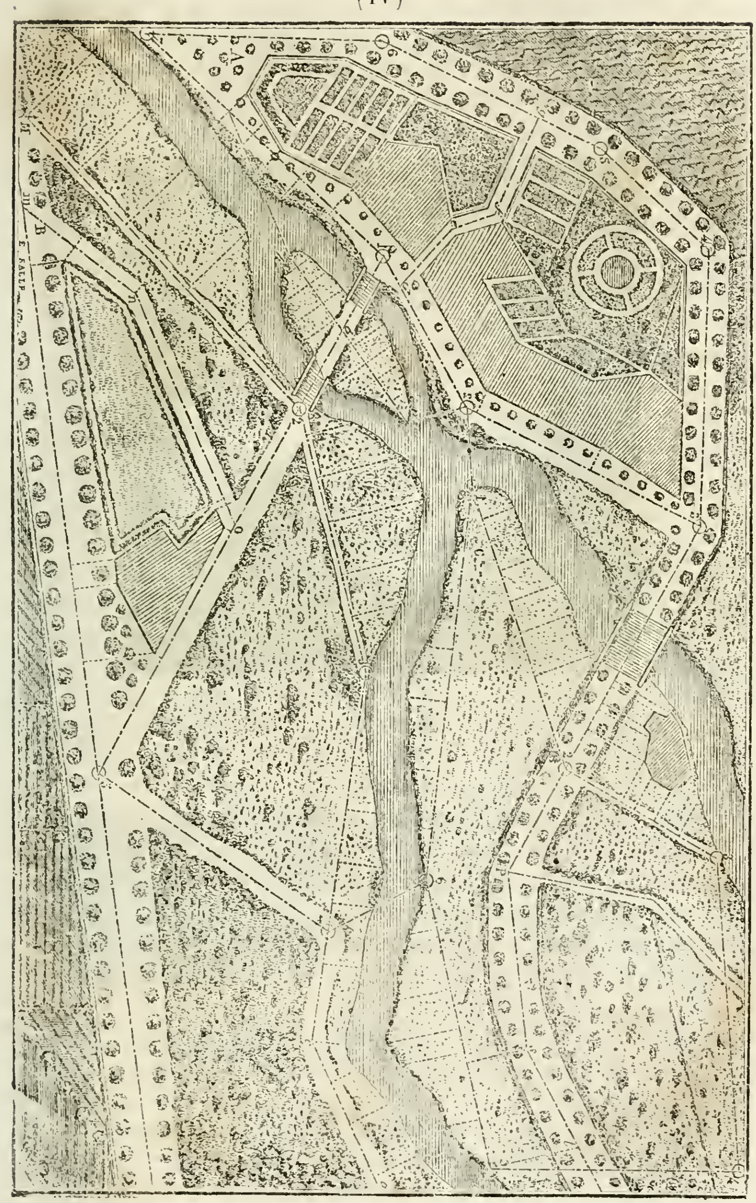
Pour lever le plan du territoire, on a choisi un nombre suffisant de bases, à portée des détails les plus importants, et situées dans les endroits les plus commodes pour les opérations. L'une de ces bases est dirigée dans l'axe de route principale à travers l'île et les deux ponts; d'autres suivent la route d'en haut; une principale suit la route d'en bas; d'autres suivent des sentiers ou la prairie à portée des bâtiments à relever ou des sinuosités de la rivière. Ces bases, qui se relient les unes aux autres, forment un réseau topographique qui se rattache au polygone qui entoure le village aux sommets (1) et (3). On relève ce réseau par cheminement en se servant de graphomètre, de la planchette ou de la boussole pour mesurer les angles (*). La plupart des détails ont été ensuite levés à l'équerre, à l'aide de perpendiculaires abaissées sur ces bases. Le lecteur peut suivre aisément sur la figure les diverses constructions et même se rendre compte de celles qui restent à effectuer et que nous n'avons pas indiquées pour ne pas surcharger la figure. L'île a été relevée à l'équerre à l'aide d'une base *mn* qui se rattache à la base principale (1) (2) (5). Les points *m* et *n* ont été aussi pour vérification rattachés à deux points du polygone qui entoure le village. D'autres sommets ont été reliés entre eux également pour des vérifications (Ex. : les sommets (2) du polygone A et (1) du polygone C; (6) du polygone C et (4) de B.

On peut repérer les sommets du polygone en mesurant leurs distances, comme dans le cas précédent.

On doit mettre beaucoup d'ordre dans la construction du réseau topographique. Ayant construit le polygone qui entoure le village, on construit les deux lignes qui traversent les deux ponts et suivent les routes. On voit bien sur la figure comment les autres lignes du réseau se rattachent successivement à celles-là des deux côtés de la rivière.

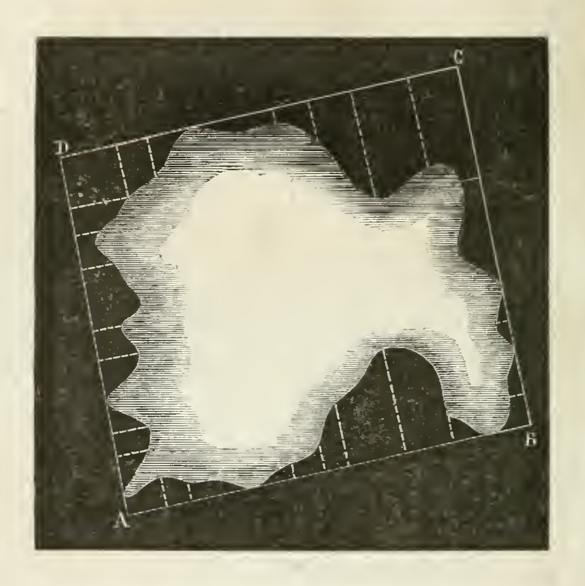
(*) Il est bien entendu qu'on peut relever chacune des lignes polygonales qui composent ce réseau par toute autre méthode, si on le trouve plus commode.

(IV)



89. 5e EXEMPLE. *Levé d'un étang, d'un bois, d'un terrain embarrassé par des obstacles tels qu'on ne peut opérer à l'intérieur.*

On entoure le terrain d'un polygone dont on lève le plan par une des méthodes connues; puis on relève à l'équerre toutes les



sinuosités, tous les points du contour en les rapportant aux côtés de ce polygone pris pour bases. (*V.* la figure du levé d'un bois à la fin de l'arpentage).

Nous avons dit ailleurs que les sentiers qui traversent un bois, les sinuosités d'une mine, se lèvent généralement à la boussole. En général, la boussole est un instrument très-commode dans tous les levés qui n'exigent pas une grande précision.

Ces exemples nous paraissent suffisants pour apprendre au lecteur comment on procède dans les levés les plus ordinaires.

PROBLÈMES A RÉSOUDRE SUR LE TERRAIN.

90. PROBLÈME. *Faire sur le terrain en un point donné* A *d'une droite un angle égal à un angle donné* a.

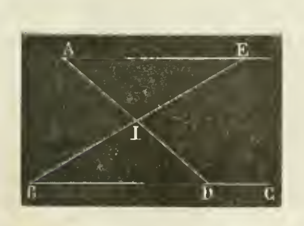
Au mètre. Si l'angle est donné sur le papier, on prend sur ses deux côtés deux longueurs *ab, ac,* d'un décimètre chacune par exemple : on trace *bc* qu'on mesure avec le double décimètre. Cela fait, on prend sur la ligne du terrain une longueur AB d'un mètre, par ex. : on plante deux piquets en A et en B; puis de ces points comme centres, avec des rayons égaux à 1 mètre et à 10 *bc*, on décrit, à l'aide d'un cordeau et d'un troisième piquet, deux arcs qui se coupent en C. On trace AC; l'angle BAC est l'angle demandé. Si l'angle est donné en degrés, on peut le construire sur le papier avec le rapporteur; puis opérer comme nous venons de le dire.

Avec le graphomètre. On met l'instrument en station au point A en dirigeant l'alidade fixe suivant la droite donnée. Puis on fait mouvoir l'autre alidade jusqu'à la division qui indique un angle égal à l'angle donné. On vise alors suivant cette alidade, et on fait planter un jalon en un point C sur la ligne de visée. On trace AC, et l'angle BAC est l'angle cherché.

Avec la planchette. On construit sur le papier l'angle donné. On met la planchette en station de manière que le sommet *a* soit au-dessus de A et la ligne *ab* sur AB (n° 62). Puis dirigeant l'alidade suivant *ac*, on fait planter un jalon sur la ligne de visée.

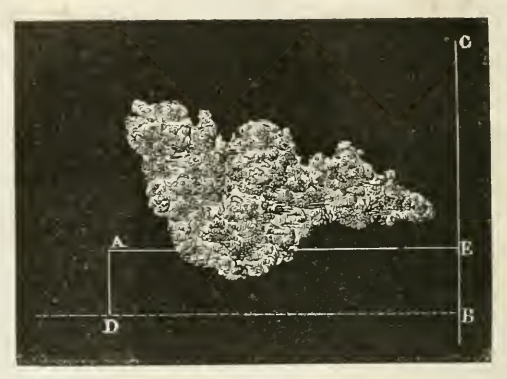
91. Problème. *Mener par un point* A *du terrain une parallèle à une droite donnée.*

1° *Avec le mètre.* On joint par une ligne droite le point A à un point D de BC. Ayant mesuré AD, on marque le milieu I, puis on trace AI que l'on prolonge d'une longueur égale IE. On trace AE; c'est la parallèle cherchée. En effet, les deux triangles BID, AIE étant égaux, les angles IDB, IAE sont égaux; ils ont la position d'angles alternes internes; AE, BC sont donc parallèles.



2° *Avec le graphomètre ou la planchette.* On joint par une droite le point A à un point D de BC (fig. précéd.). On mesure l'angle ADB; puis on construit au point A sur AD un angle DAE égal à ADB; AE est la parallèle demandée. (Géom., 1er livre.)

3° *Avec l'équerre.* On abaisse AD perpendiculaire sur DB; au

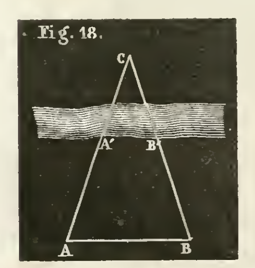


point A on élève une perpendiculaire AE sur AD; AE est la parallèle demandée. (Géom., 1er livre.)

92. Problème. *Prolonger une droite au delà d'un obstacle.*

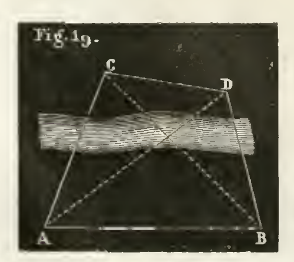
Nous avons résolu ce problème n° 38, application.

93. Problème. *Déterminer la distance d'un point accessible* A, *à un point inaccessible, mais visible.*



On trace, à partir de A, une base AB que l'on mesure. Puis on relève le triangle ABC, *au mètre*, ou au graphomètre, ou à la planchette. On ramène le côté *ac* à sa valeur sur le terrain; c'est-à-dire que si l'échelle est à $\frac{1}{1000}$, on multiplie *ac* par 1000. Le produit est la distance demandée.

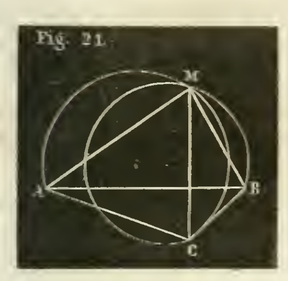
94. Problème. *Déterminer la distance de deux points inaccessibles, mais visibles.*



On mesure une base AB, telle que l'on voie C et D de A et de B. Puis on relève chacun des points C et D par une des méthodes connues, en se servant des angles à la base des triangles ACB, ADB. On mesure la droite *cd* du plan, et on la ramène à la grandeur du terrain comme il vient d'être dit n° 93.

95. Problème. *Trois points* A, B, C *d'un terrain étant rapportés en* a, b, c *sur un plan ou sur une carte, marquer sur le plan ou sur la carte un point* M *du terrain d'où les lignes* AC, BC *ont été vues sous des angles connus* AMC, BMC.

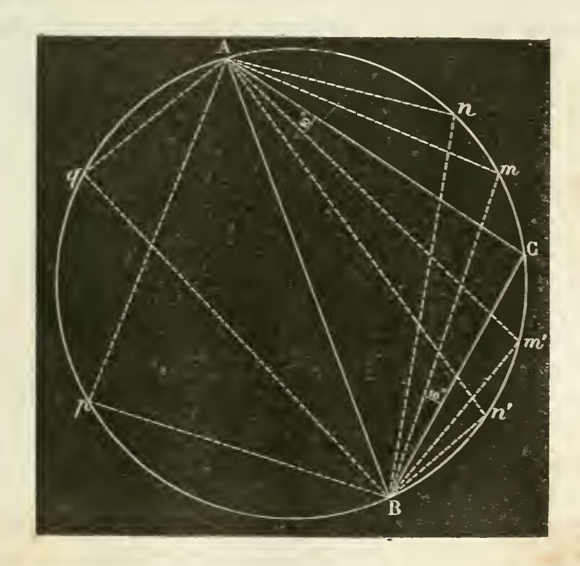
On décrit sur *ac* un segment capable de l'angle AMC, et sur *bc* un segment capable de l'angle BMC. Le point d'intersection *m* de ces arcs représente M sur le plan.



On opère ainsi quand on n'a qu'un seul point à relever d'un terrain dont on a déjà le plan. Au moyen d'une seule station, en M, on obtient les éléments nécessaires pour marquer ce point sur le plan.

96. Problème. *Construire une circonférence passant par trois points donnés* A, B, C, *du terrain, sans connaître le centre.*

Voici une méthode assez expéditive pour obtenir autant de



points que l'on veut de cette circonférence. On construit à droite et à gauche de AC un certain nombre d'angles égaux entre eux,

tels que CAm, mAn, CAm', etc., de 10° par exemple, à l'aide d'un graphomètre ou d'une planchette. On construit les mêmes angles à droite et à gauche de BC (V. la fig.). On marque des mêmes numéros les lignes de construction semblablement placées à gauche de AC et de BC, par ex. Am et Bm, An et Bn. On fait de même pour celles qui sont à droite, Am' et Bm', etc. Chaque point de rencontre n de deux lignes de même numéro, situées toutes deux à gauche, ou toutes deux à droite, de AC et de BC, est un point de la circonférence cherchée. Il est évident qu'on peut obtenir de cette manière des points de cette circonférence aussi nombreux et aussi rapprochés que l'on veut.

Démonstration. Supposons que les lignes An, Bn portent toutes deux le n° 2, et soit a l'un des petits angles égaux dont nous venons de parler. CA$n = 2a$ et CB$n = 2a$; donc CAn = CBn. On a construit un nouveau triangle AnB en augmentant l'angle à la base CAB de CAn et en diminuant CBA de CBn = CAn; il y a compensation. La somme nAB + nBA = CAB + CBA; par suite l'angle au sommet AnB = ACB. Le nouveau sommet n est donc sur l'arc du segment de cercle capable de l'angle ACB construit sur AB comme corde. (*Géométrie*, 2e livre.)

FIN DU LEVÉ DES PLANS.

NOTIONS SUR L'ARPENTAGE.

---

97. L'arpentage a pour objet de mesurer la superficie des terrains. On y parvient en appliquant les principes développés dans le IVe livre de géométrie. Si le terrain est terminé par des lignes droites, c'est un polygone que nous savons mesurer. S'il est limité en totalité ou en partie par des lignes courbes, on décompose celles-ci en parties suffisamment petites pour qu'elles puissent être considérées comme des lignes droites; on rentre ainsi dans le cas précédent, et on peut appliquer les mêmes principes.

Ayant étudié le IVe livre, nous savons d'avance quelles sont les principales opérations de l'arpenteur sur le terrain : tracer ou choisir des bases; abaisser des perpendiculaires sur ces bases; mesurer les unes et les autres. Il a donc besoin d'une chaîne, d'une équerre et de jalons; nous connaissons ces instruments et la manière de s'en servir.

L'arpenteur dessine ordinairement à vue et à main levée un croquis du contour du terrain. Il choisit ou trace sur cette figure les lignes qu'il convient de mesurer pour en évaluer la surface. Puis il mesure ces lignes sur le terrain, en ayant soin d'inscrire sur son croquis chaque nombre trouvé à côté de la ligne mesurée. Il a ainsi tous les éléments nécessaires à son évaluation, et n'a plus qu'à calculer; ce qu'il peut faire sur le terrain ou dans son cabinet.

Si l'on possède le plan du terrain construit à une échelle connue, on peut y choisir et au besoin y tracer les lignes nécessaires pour l'évaluation de la surface, mesurer ces lignes, les ramener à la valeur qu'elles auraient sur le terrain, et enfin se servir des nombres trouvés pour le calcul de la surface.

Si, pour un motif quelconque, un arpenteur lève le plan d'un terrain dont il doit aussi évaluer la superficie, il est évident qu'il a intérêt à faire son levé *à l'équerre,* afin que les mesures prises pour le levé servent pour l'arpentage.

Nous ne nous occuperons que des surfaces planes. Quand le terrain est incliné, on ne mesure ordinairement que sa projection

horizontale, c'est-à-dire qu'on projette son contour sur un plan horizontal et qu'on mesure la surface terminée par cette projection (nº 2). Toutes les longueurs que l'arpenteur mesure sur le terrain doivent donc être, dans ce cas, réduites à l'horizon.

L'unité de surface généralement adoptée dans l'arpentage est *l'are* (décimètre carré). Nous allons considérer les cas principaux qui peuvent se présenter.

98. 1er Cas. *La figure du terrain est simple.*

C'est un triangle, ou un rectangle, ou un parallélogramme, ou un trapèze. Dans ce cas, on applique immédiatement une des formules connues,

$$T=\frac{1}{2}B\times H;\ R=B\times H;\ \text{Parall.}=B\times H;\ \text{Trapèze}=\frac{1}{2}(B+b)\times H.$$

Ayant choisi la base, on trace la hauteur à l'aide de l'équerre. On mesure avec la chaîne la base ou les bases et la hauteur, puis on calcule l'aire de la figure suivant la formule qui s'y rapporte.

Quand c'est un triangle, s'il est plus commode de mesurer les trois côtés, on fait usage de la formule suivante donnée et démontrée dans notre complément de géométrie :

$$S=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

dans laquelle p désigne le demi-périmètre, a, b, c, les trois côtés.

99. 2e Cas. *Le terrain a la forme d'un polygone quelconque, convexe ou à angles rentrants, mais à contours rectilignes.*

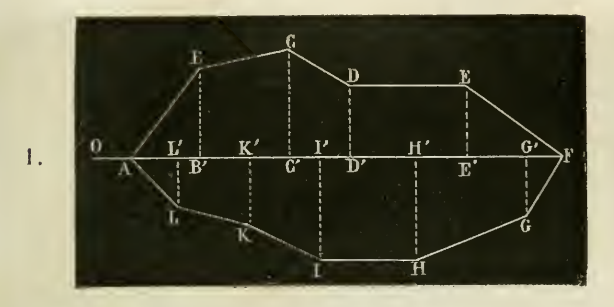
Il y a deux méthodes. On décompose le polygone en triangles par des lignes intérieures tracées sur le croquis, puis sur le terrain. On évalue l'aire de chaque triangle en particulier, puis on additionne. On choisit ordinairement des diagonales pour bases, parce que chacune peut servir pour deux triangles. (*V.* la Géométrie, *Mesure des polygones*, nº 203.)

Cette méthode, plus simple en théorie, est moins commode dans la pratique que la suivante beaucoup plus usitée.

On trace, soit à l'intérieur soit à l'extérieur du terrain, une base sur laquelle on puisse aisément abaisser des perpendiculaires de tous les sommets, puis on abaisse ces perpendiculaires à l'aide de l'équerre. Le terrain est ainsi décomposé en trapèzes et en triangles

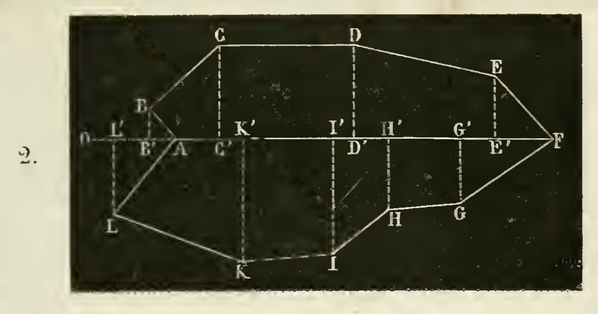
rectangles dont on mesure avec la chaîne les bases et les hauteurs qu'on a soin d'inscrire sur le croquis ou sur son carnet. Les me-

1.



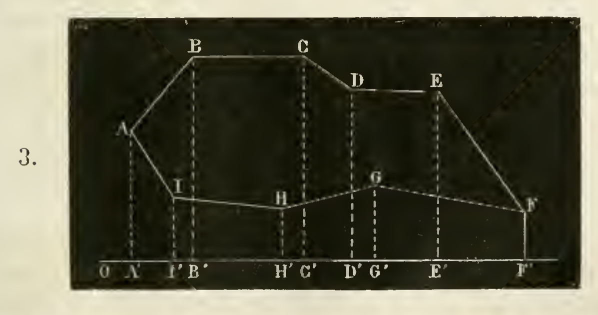
sures prises, on calcule l'aire de chaque trapèze ou triangle, et on additionne les résultats.

2.



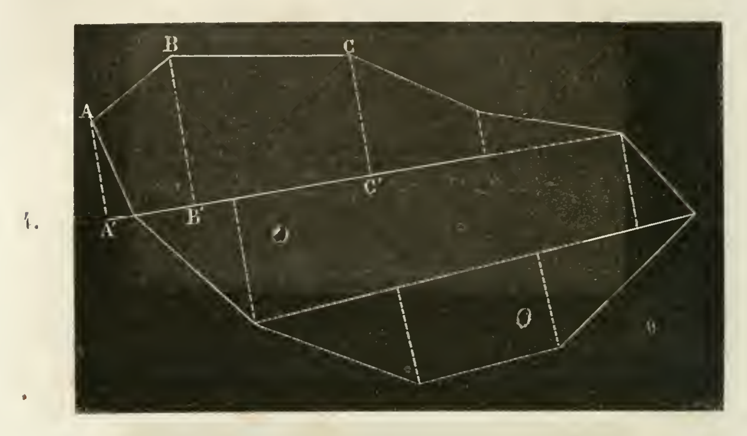
Quelquefois des triangles ou des trapèzes doivent être retranchés,

3.



on le voit sur le croquis ou sur le terrain même. (*Fig.* 2 et *fig.* 3.)

Quand le terrain est étendu en tous sens, il devient nécessaire de tracer plusieurs bases qui le décomposent en parties telles que



4.

les perpendiculaires ne soient ni trop longues, ni difficiles à mesurer. On n'a toujours d'ailleurs que des trapèzes ou des triangles rectangles à évaluer. (*Fig.* 4.)

100. L'arpentage d'un terrain à contour sinueux n'est généralement pas difficile; mais il est quelquefois un peu long : on abrége en procédant avec ordre et méthode. Chaque perpendiculaire appartient à deux trapèzes, ou à un trapèze et à un triangle; de là des simplifications. On simplifie le plus possible en suivant une méthode que nous allons indiquer après avoir défini deux termes dont nous nous servirons pour abréger le discours.

Nous appellerons *ordonnées* les perpendiculaires abaissées des sommets du polygone sur une base, et *abscisses*, les distances des pieds de ces perpendiculaires à un même point O de la base qui laisse toutes les ordonnées du même côté. Ex. : BB', CC', DD',... *fig.* 1, sont des ordonnées; OA, OB', OC' sont des abscisses.

On peut ne pas adopter ces dénominations et désigner ces distances comme nous l'avons fait dans le tableau de la page 23.

Voici maintenant la méthode :

L'arpenteur mesure les ordonnées et les abscisses en partant d'un point O de la base qui laisse toutes les perpendiculaires du même côté; ces mesures se prennent comme il a été expliqué n° 40 (levé à l'équerre). Il inscrit ces longueurs. à mesure qu'il les trouve, dans un

tableau dont le cadre est préparé à l'avance. Voici deux tableaux qui se rapportent aux figures 1 et 3; ils sont suivis des explications nécessaires.

TABLEAU SE RAPPORTANT A LA FIGURE 1.

SOMMETS.	ABSCISSES.	ORDONNÉES.	DIFFÉRENCES des abscisses.	AIRES doublées.
	mèt.	mèt.		
A	3,25	0	mèt.	met. c.
B	9,80	8,60	13,27	114,1220
C	16,52	9,20	10,68	98,2560
D	20,48	6,50	16,38	106,470
E	32,90	6,34	19,77	125,3418
F	40,25	0		
A	3,25	0		48,2825
L	8,20	4,45	10,85	53,8125
K	14,10	5,25	10,25	149,6325
I	18,45	10,65	14,05	190,314
H	28,15	9,81	19,40	65,098
G	37,85	5,38	12,10	
F	40,25	0		
	Aire du terrain doublée.			951,3293
	Aire du terrain.			475,6646

Le tableau se compose absolument de la même manière pour la *fig.* 2. Nous engageons le lecteur à le faire pour s'exercer.

TABLEAU SE RAPPORTANT A LA FIGURE 3.

SOMMETS.	ABSCISSES.	ORDONNÉES.	DIFFÉRENCES des abscisses.	AIRES en plus (doublées.)	AIRES en moins (doublées.)
	mèt.	mèt.			
A	1,00	7,32	mèt.	mèt. c.	
B	4,24	11,25	11,72	131,8500	
C	12,72	11,20	11,41	127,7920	
D	15,65	9,12	7,09	82,6608	
E	19,81	8,96	8,38	75,0848	mèt. c.
F	24,03	3,05	— 3,09		9,4245
G	16,72	4,86	—13,29		64,5894
H	11,74	3,81	—13,54		51,5874
I	3,18	4,72	—10,74		50,6928
A	1,00				
			Totaux.	417,3876	176,2941
			Différence.	241,1035	
			Aire du terrain.	120,5517	

EXPLICATION. *Construction des tableaux.*

Avant de prendre aucune mesure, on prépare le cadre avec son en tête tel qu'on le voit sur nos tableaux, et on y inscrit d'après le croquis tous les sommets du polygone, en procédant par ordre à partir de celui qui est le plus proche (en projection) de l'origine O choisie sur la base. *Quand la base traverse le terrain*, comme dans les *fig.* (1) et (2), il convient de partager les sommets en deux séries que l'on inscrit l'une après l'autre. Ainsi pour la *fig.* 1, nous avons inscrit les sommets situés sur la base et au-dessus, puis les sommets situés sur la base et au-dessous. *Quand la base ne traverse pas le terrain*, on inscrit tous les sommets à partir du plus voisin de l'origine O des abscisses, en faisant le tour du polygone toujours dans le même sens, de manière à finir par les sommets les plus rapprochés de la base. (V. ce qui a été fait pour la *fig.* 3, 2e tableau)

On inscrit l'abscisse et l'ordonnée de chaque sommet aussitôt mesurées à côté de la lettre qui désigne ce sommet.

Les mesures prises et inscrites, on retranche chaque abscisse de celle qui occupe le deuxième rang après elle dans la même série (la 1re de la 3e, la 2e de la 4e, etc.). On inscrit le reste dans la colonne intitulée différence des abscisses à côté de l'ordonnée du point intermédiaire (la différence entre la 1re abscisse et la 3e s'écrit à côté de la 2e ordonnée; etc.). Quand la soustraction de deux abscisses ne peut s'effectuer dans l'ordre indiqué (celle qui suit étant la plus grande), on effectue la soustraction en sens inverse, et on fait précéder la différence de ce signe — (moins). (V. le 2e tableau.)

Après la colonne des différences se trouve la colonne des aires (doublées). Quand il n'y a pas de différences en moins, on ne fait qu'une colonne pour les aires; dans le cas contraire, on en fait deux intitulées aires *en plus*, aires *en moins* (2e tableau).

Pour obtenir les aires, on multiplie chaque différence par l'ordonnée écrite à côté, et on inscrit le produit sur la même ligne horizontale dans la colonne des aires *en plus* si la différence est *en plus*, dans la colonne des aires *en moins* dans le cas contraire. On additionne les aires de chaque colonne; quand il y a des aires *en moins*, on les retranche des aires en plus.

Enfin, on prend la moitié de la somme, ou la moitié du reste quand on a dû faire la soustraction (*).

Telle est la méthode que nous croyons la plus simple et la plus régulière pour calculer l'aire d'un terrain à contour polygonal ou sinueux, et même curviligne; car elle s'applique aussi bien aux terrains terminés par des lignes courbes.

Il est à remarquer que les trois premières colonnes doivent être établies dans le levé du plan à l'équerre par tout géomètre ou arpenteur habitué à opérer avec ordre (V. page 23); or, ces trois colonnes remplies, il est bien facile de calculer l'aire du terrain. Il convient donc de tenir bonne note des mesures prises dans le levé à l'équerre quand on doit plus tard calculer l'aire du terrain.

Démonstration. L'exactitude de la méthode est très-facile à vérifier; le lecteur peut le faire sur nos trois figures.

Dans la *fig.* 1, par exemple, à l'ordonnée BB', qui appartient à un trapèze et à un triangle, correspond dans l'évaluation des aires le produit $\frac{1}{2}$ BB' $\times$ AC' $= \frac{1}{2}$ BB' $\times$ (OC' — OA); or le 1er produit écrit dans la 5e colonne est BB' $\times$ (OC' — OA); l'aire est donc doublée. A l'ordonnée CC' correspond le produit $\frac{1}{2}$ CC' $\times$ B'D' $= \frac{1}{2}$ CC' $\times$ (OD' — OB'), etc. De même pour toutes les ordonnées de la *fig.* (1).

Dans la *fig.* (2), à l'ordonnée BB' correspond dans l'évaluation des aires le produit $\frac{1}{2}$ BB' (B'C' — AB') $= \frac{1}{2}$ BB' $\times$ AC' $= \frac{1}{2}$ BB' (OC' — OA). Pour les autres ordonnées supérieures, c'est la même chose que dans la *fig.* 1. Au-dessous de la base, on voit qu'à l'ordonnée LL' correspond le produit $\frac{1}{2}$ LL' $\times$ (L'K' — L'A) $= \frac{1}{2}$ LL' $\times$ AK' $= \frac{1}{2}$ LL' $\times$ (OK' — OA); etc.

Dans la *fig.* 3, les aires doivent être ajoutées tant que les projections des sommets ne rétrogradent pas vers l'origine O des

(*) Les produits écrits dans les colonnes sont les aires doublées, comme on l'explique plus loin. On inscrit néanmoins ces produits sans les diviser par 2, parce qu'il est évidemment plus simple de diviser le résultat final par 2 que de diviser tous les produits séparément.

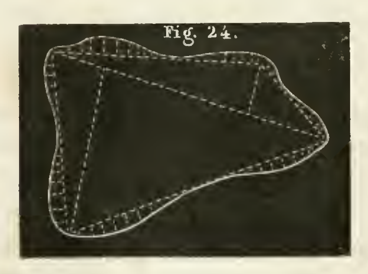
abscisses ; il en est ainsi jusqu'au sommet F. A partir de ce sommet, les aires sont *en moins*, c'est-à-dire doivent être retranchées de celles qu'on a déjà calculées; or, à partir de là, les abscisses vont en effet en diminuant et les différences s'évaluent en sens contraire.

REMARQUE. On peut évidemment prendre le pied de la première ordonnée à gauche pour origine des *abscisses*. Il convient au moins de prendre l'origine O très-rapprochée de cette première ordonnée. Nous l'avons placée un peu trop loin dans notre première figure; la distance OA est trop grande.

Quand il y a plusieurs bases on fait un tableau analogue pour chacune.

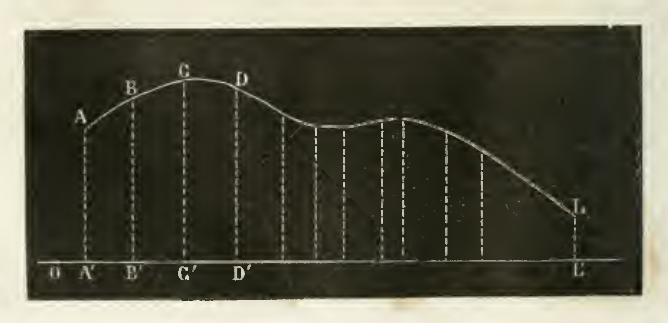
Si nous nous sommes étendu sur la question précédente, c'est que c'est la principale, ou pour mieux dire l'unique question de l'arpentage. On va voir, en effet, comme nous l'avons annoncé, que la méthode s'applique aux terrains terminés par des lignes courbes.

101. TROISIÈME CAS. *Le contour du terrain est une ligne courbe, ou comprend une ou plusieurs lignes courbes.*


Fig. 24.

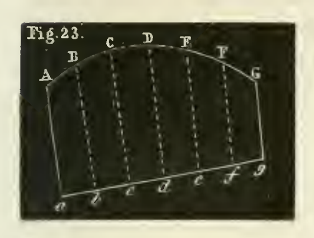
Quand le terrain est long et étroit, on y trace une base. (V. l'île de la planche IV, page 61). Quand il est étendu en tous sens, on y inscrit une série de bases qui le décomposent en figures à contour rectiligne et en figures telles que AA'.

Pour mesurer une figure telle que AA'LL', on peut opérer



comme il suit. On élève sur la base des perpendiculaires assez nombreuses et assez rapprochées pour que les parties interceptées de la courbe puissent être, sans trop grande erreur, considérées comme des lignes droites. Les perpendiculaires décomposent le terrain en trapèzes qu'on considère comme ayant les quatre côtés rectilignes. Le terrain ainsi décomposé, on opère exactement comme dans le cas précédent; pour plus de simplicité et de régularité on applique la méthode que nous avons indiquée n° 100.

102. On opère ainsi quand la courbure du contour est telle qu'on peut plus écarter les perpendiculaires dans certains endroits que dans d'autres.



Quand la courbure est partout aussi prononcée, comme dans la figure $aAGg$, il est plus simple et plus régulier de diviser la base en parties égales. On applique alors la règle suivante :

Règle. On divise la base préalablement mesurée en un certain nombre de parties égales (*). A chaque point de division on élève une perpendiculaire jusqu'à la courbe. Si la distance $ab = \delta$ de deux perpendiculaires est assez petite, chacun des arcs interceptés de la courbe peut être considéré, sans trop grande erreur, comme une ligne droite et la figure se trouve décomposée en trapèzes ordinaires ayant tous la même hauteur δ. Cela posé si on appelle y_0, y_1, y_2, ... y_3 les diverses ordonnées Aa, Bb, etc., Y leur somme et S l'aire de la figure proposée $aAGg$, on trouve d'abord que

$$S = \delta \times \frac{y_0 + y_1}{2} + \delta \times \frac{y_1 + y_2}{2} + \delta \times \frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots + \delta \times \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

puis en réduisant

$$S = \delta \times \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right);$$

(*) Voir plus loin le 1er problème du chapitre *Partage des terrains*, page 78.

et enfin $$S = \delta \times \left[Y - \frac{y_0 + y_n}{2} \right] \qquad (1)$$

L'aire d'une figure telle que aAGg, dont la base a été divisée en parties égales, a pour valeur approchée une des parties de la base multipliée par la somme de toutes les perpendiculaires diminuée de la demi-somme des perpendiculaires extrêmes.

Remarque. La formule (1) s'applique encore quand la courbe part de la base ou s'y termine; il suffit d'y faire $y_0 = 0$ ou $y_n = 0$.

103. Formule de Robert Simpson. Voici une autre formule un peu plus compliquée, mais qui donne autant d'approximation avec moins de perpendiculaires, ou si on veut, une plus grande approximation avec le même nombre de perpendiculaires (*). Pour appliquer cette formule, il faut diviser la base en un nombre *pair* $2n$ de parties égales.

$$S = \frac{1}{3}\delta \left[(y_0 + y_n) + 4\left(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots y_{2n-1}\right) + 2\left(y_2 + y_4 + \cdots y_{2n}\right) \right]. \qquad (2)$$

L'aire à évaluer est égale au tiers d'une division de la base multipliée par la somme des perpendiculaires extrêmes augmentée de 4 fois la somme des perpendiculaires de rang impair et de 2 fois la somme des perpendiculaires de rang pair.

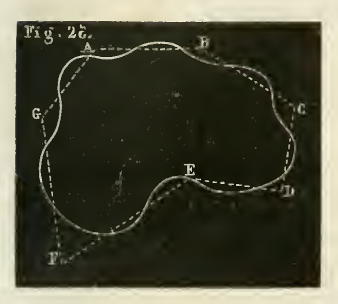
Avec cette formule, il suffit d'un nombre assez restreint de perpendiculaires pour avoir la surface cherchée avec une approximation suffisante.

L'application des deux formules précédentes n'offre aucune difficulté.

104. Autre méthode. Voici encore une méthode peut-être un peu moins sûre, mais généralement plus expéditive pour calculer l'aire d'un terrain à contour curviligne.

(*) Cela tient à ce qu'en établissant cette formule on fait en plus ou en moins des compensations qui atténuent notablement l'erreur commise en considérant simplement comme dans la méthode précédente les arcs de courbe comme des lignes droites. Nous démontrerons cette formule dans le supplément.

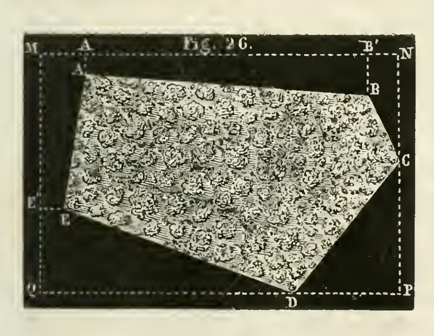
On trace à l'aide de jalons des alignements AB, BC, CD, ..., de manière à déterminer un polygone ABCDEFG dont la surface soit égale, à peu de chose près, à celle du terrain considéré. Pour cela, on choisit les points A, B, C, ..., de manière que les parties retranchées soient compensées par les parties ajoutées. Un peu d'habitude suffit pour établir les jalons de manière à opérer cette compensation. Cela fait, on détermine l'aire du polygone que l'on regarde comme celle du terrain.



105. *Arpenter un terrain dans lequel on ne peut pénétrer ou tirer des lignes.*

Enfin, on doit souvent arpenter certaines superficies, comme un *bois*, une *pépinière*, un *marais*, un étang, une récolte sur pied, etc., dans lesquelles il n'est pas possible de pénétrer, de tirer des lignes, d'élever des perpendiculaires; alors on ne peut plus employer les procédés que nous avons indiqués. Voici comment on y supplée.

Soit ABCDE *un terrain dans lequel on ne peut pénétrer.* On commence par envelopper ce terrain dans un rectangle ou dans un trapèze, comme il est indiqué dans les figures suivantes. On détermine la surface de la figure auxiliaire MNPQ, puis celle des parties AA'EE', EE'QD, ... extérieures au terrain que l'on veut mesurer. On retranche ces dernières; la différence est évidemment l'aire cherchée. (V. comme second exemple l'étang de la pl. V, p. 62.)



Remarque. Nous répéterons, en terminant, que l'arpenteur doit en général mettre beaucoup d'ordre dans son travail, soit pour inscrire, soit pour employer les longueurs mesurées sur le terrain.

PARTAGE DES TERRAINS.

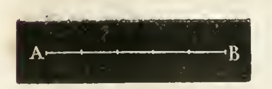
1. Nous ne pouvons traiter cette question d'une manière générale, les conditions du partage et la forme du terrain pouvant varier d'une infinité de manières. Nous nous contenterons de traiter quelques exemples de manière à mettre le lecteur sur la voie pour la résolution des questions de ce genre.

Nous considérerons les partages comme devant être faits, à l'aide de la chaîne et de l'équerre, *sur le terrain même*, non sur le plan et dans le cabinet. C'est à ce point de vue que nous nous sommes placé pour résoudre les questions suivantes.

Nous indiquerons cependant dans des notes la manière de résoudre les questions proposées en s'aidant du plan du terrain. Si le plan est *fait d'avance*, il sera souvent plus court d'exécuter sur le papier les opérations nécessaires pour diviser la figure du terrain suivant les conditions proposées, puis de tracer les lignes de partage sur le terrain d'après leur position sur le plan. Dans les cas difficiles, il peut même être avantageux de dresser le plan tout exprès ou au moins d'en faire le croquis sur le papier; on voit plus aisément ce qu'il y a faire pour résoudre la question proposée; la question résolue, il n'y a plus qu'à tracer les lignes de partage sur le terrain.

2. Problème. *Diviser une droite* AB *en parties égales.*

Par ex. : En 5 parties égales :



On mesure la droite donnée AB. On divise la longueur trouvée par 5; puis on porte sur AB, à partir de A et consécutivement, cinq longueurs égales à ce cinquième, en marquant par un piquet ou par un signe quelconque l'extrémité de chaque longueur.

Applications. La longueur de AB est 303^m,55. On divise cette longueur par 5; le quotient est 60^m,71. On porte successivement sur AB, à partir de A, cinq longueurs égales à 60^m,71.

3. Problème. *Diviser une droite donnée* AB *en parties proportionnelles à des nombres donnés, ou suivant des conditions indiquées quelconques.*

On mesure la droite donnée. On partage *par le calcul* la longueur trouvée en parties proportionnelles aux nombres donnés, ou suivant les conditions fixées (*Arithmét.* ou *Algèbre*). On porte les longueurs trouvées sur AB, à partir du point A et consécutivement, dans l'ordre indiqué par l'énoncé même de la question, en ayant soin de marquer par un piquet ou par un signe quelconque l'extrémité de chaque longueur.

Application. La longueur de AB est de $324^{m},72$; on doit la diviser en parties proportionnelles aux nombres 2, 3 et 7. C'est un calcul d'arithmétique :

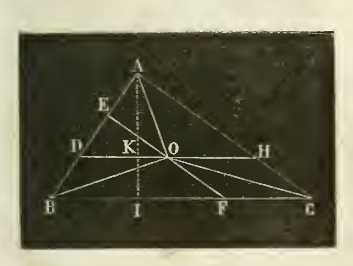
$$2+3+7=12; \qquad 1^{re} \text{ partie } \frac{324,72\times 2}{12} = 54^{m},12;$$

$$2^{e} \text{ partie } \frac{324,72\times 3}{12} = 81^{m},18; \quad 3^{e} \text{ partie } \frac{324,72\times 7}{12} = 189^{m},42.$$

A l'aide de la chaîne on porte successivement ces trois longueurs sur AB à partir de A (*).

4. Problème. *Déterminer dans l'intérieur d'un triangle un point tel que si on le joint aux trois sommets du triangle, celui-ci soit divisé en parties équivalentes.*

On divise un des côtés AB en trois parties égales, BD, DE, EA (n° 2). On mène par le point D une parallèle à BC, et par le point E une parallèle à AC. Le point O où les deux parallèles DH, EF se rencontrent est le point demandé; on mène les lignes OA, OB, OC, et le partage est effectué.



(*) Les questions des nos 2 et 3 se résolvent sur le plan du terrain comme il est indiqué dans le 3e livre de *Géométrie*, nos 163 et 164. La division de la ligne *ab* du plan effectuée, on mesure les parties obtenues, et on porte ces parties ramenées à la grandeur du terrain sur la ligne AB.

DÉMONSTRATION. Abaissons la perpendiculaire AI sur BC. La ligne DH parallèle à BC divise toutes les lignes qui vont de A à BC en parties proportionnelles. BD étant le tiers de AB, IK est le tiers de AI. Le triangle OBC a même base BC que le triangle proposé et une hauteur trois fois moindre; $OBC = \frac{1}{3} ABC$. On prouve de même que $OAC = \frac{1}{3} ABC$. OAB est évidemment le troisième tiers.

On détermine de même un point O *tel que si on le joint aux trois sommets du triangle, celui-ci soit divisé en parties proportionnelles à des nombres donnés*, 3, 5 *et* 7 *par exemple.*

On partage l'un des côtés BA en parties proportionnelles aux nombres 3, 4 et 5. (V. n° 3.) Supposons que BD soit les $\frac{3}{12}$ de BA, DE les $\frac{4}{12}$, et AE les $\frac{7}{12}$ (figure précédente). On mène par le point D une parallèle à BC, et par le point E une parallèle à AC; ces deux parallèles DH, EF se coupent en un point O qui est le point cherché. Les triangles OBC, OAC, OAB sont proportionnels à 3, 4 et 5; en effet, BA étant les $\frac{3}{12}$ de BA, IK est les $\frac{3}{12}$ de AI; par suite $OBC = \frac{3}{12}$ de ABC. On prouve de même que $OAC = \frac{4}{12}$ de ABC. Le reste $OAB = ABC - \frac{7}{12} ABC = \frac{5}{12} ABC$.

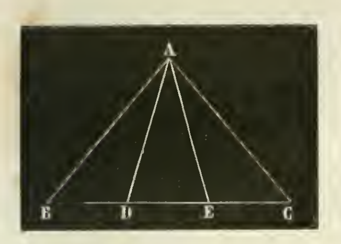
On peut déterminer le point O de manière que les triangles OBC, OAC, OAB *aient les surfaces données*, par ex. : $25^{ares},40$; $18^{ares},45$; $15^{ares},85$. ABC est la somme de ces superficies. On mesure l'un des côtés AB; on divise *par le calcul* la longueur trouvée en parties proportionnelles aux superficies données, $25^a,40$; $18^a,45$; $15^a,85$; c'est-à-dire aux nombres 2540, 1845, 1585. On porte consécutivement les trois longueurs calculées à partir de B; soient BD, DE, EA les trois parties; puis on achève comme précédemment.

La somme des superficies est $59^a,70$. Il résulte de la construction que le triangle OBC est au triangle ABC dans le rapport de $25^a,40$ à $59^a,70$; puisque $ABC = 59^a,70$, $OBC = 25^a,40$. Ainsi des autres.

Remarque. On peut donner à chaque partie désignée du triangle ABC la base que l'on veut. Nous avons donné tout à l'heure BC pour base au triangle qui correspond au nombre 3 ; nous aurions pu donner cette base au triangle qui correspond au nombre 7 ; il suffisait de compter à partir de B la partie de AB proportionnelle à 7. De même pour le dernier problème ; on peut donner la base que l'on veut au triangle qui a l'une des superficies données.

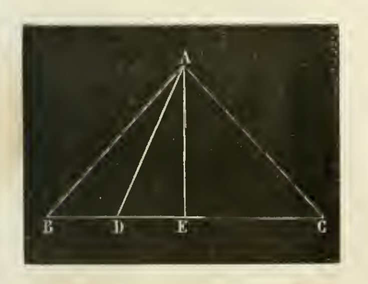
5. Problème. *Diviser un triangle en trois parties équivalentes par des lignes partant du même sommet* A.

On partage le côté opposé BC en trois parties égales BD, DE, EC (n° 2) ; puis on trace les lignes AD, AE. Les triangles ABD, ADE, AEC, ainsi formés, sont équivalents comme ayant des bases égales et la même hauteur.



On peut diviser ainsi le triangle en autant de parties égales que l'on veut ; il suffit de diviser la base BC en ce nombre de parties égales, puis de joindre le sommet A aux points de division.

6. Problème. *Partager le triangle* ABC *en parties proportionnelles aux nombres donnés* 3, 4, *et* 8 *par des lignes partant du même sommet* A.



On partage BC en parties proportionnelles aux nombres donnés 3, 4, et 8 (n° 3) ; puis on joint le sommet A aux points de divisions D, E. Les triangles ABD, ADE, AEC de même hauteur, sont proportionnels à leurs bases BD, DE, EC qui sont elles-mêmes proportionnelles à 3, 4, et 8.

7. Problème. *Partager un triangle en trois parties de grandeurs données par des lignes partant du même sommet* A.

Les parties doivent être 15 ares, 20 ares, 40 ares.

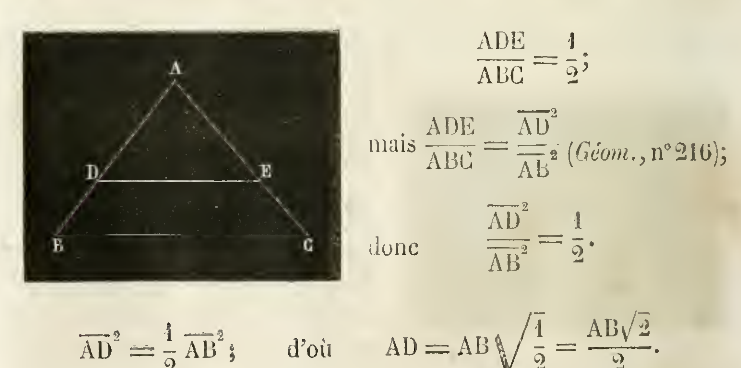
On partage le côté opposé BC en parties proportionnelles aux nombres 15, 20 et 40 (fig. précédente); puis on joint le sommet A aux points de division D et E.

Le triangle proposé ABC contient $15 + 20 + 40$ ou 75 ares; $\frac{1}{75}$ ABC $=$ 1 are; ABD égal à $\frac{15}{75}$ de ABC $=$ 15 ares. On voit de même que ADE $=$ 20 ares, et AEC $=$ 40 ares.

8. Les conditions du partage du triangle ABC par des lignes partant du même sommet peuvent être aussi variées que celles du partage d'une ligne ou d'un nombre donné quelconque. Le problème se résoudra toujours en partageant suivant les mêmes conditions, à l'aide de l'arithmétique ou de l'algèbre, le nombre qui exprime la longueur de BC. Les parties de BC une fois calculées, on les porte sur cette ligne avec la chaîne, et on joint le point A à chacune de leurs extrémités (*).

9. *Diviser un triangle en deux parties équivalentes par une parallèle à sa base.*

Supposons le problème résolu, et soit DE la ligne de partage. Le triangle ADE, semblable à ABC, en est la moitié.



$$\frac{\text{ADE}}{\text{ABC}} = \frac{1}{2};$$

mais $\frac{\text{ADE}}{\text{ABC}} = \frac{\overline{\text{AD}}^2}{\overline{\text{AB}}^2}$ (*Géom.*, n° 216);

donc $$\frac{\overline{\text{AD}}^2}{\overline{\text{AB}}^2} = \frac{1}{2}.$$

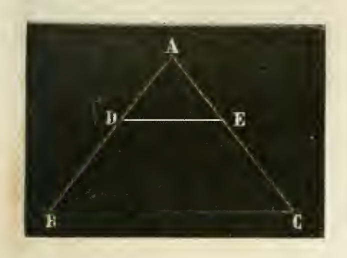
$$\overline{\text{AD}}^2 = \frac{1}{2}\overline{\text{AB}}^2; \quad \text{d'où} \quad \text{AD} = \text{AB}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\text{AB}\sqrt{2}}{2}.$$

Opérations. On mesure AB (avec la chaîne), puis on multiplie

(*) Les problèmes des nos 4, 5, 6, 7 se résolvent de la même manière sur le plan du terrain.

la *moitié* de la longueur trouvée par $\sqrt{2}$ évaluée en décimales (*Complém. de Géom.*, n° 3). Le nombre trouvé exprime une longueur que l'on porte à partir de A sur AB ; soit AD. On mène DE parallèle à BC.

10. *Diviser un triangle* ABC *en deux parties proportionnelles à des nombres donnés par une parallèle au côté* BC.



Soient 3 et 7 les nombres donnés.

$3+7=10$. Les deux parties seront dans le rapport donné si l'une est les $\frac{3}{10}$ et l'autre les $\frac{7}{10}$ du triangle ABC (V. l'*Arithm.*). Supposons le problème résolu, et soit DE la parallèle demandée :

$$ADE=\frac{3}{10}\,ABC,\quad \text{ou}\quad \frac{ADE}{ABC}=\frac{3}{10};\quad \text{mais}\quad \frac{ADE}{ABC}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2};$$

$$\text{donc}\quad \frac{\overline{AD}^2}{AB^2}=\frac{3}{10};\quad \overline{AD}^2=\frac{3}{10}\,\overline{AB}^2,\quad \text{et}\quad AD=AB\sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Opérations. On mesure AB avec la chaîne ; on multiplie la longueur trouvée par la racine carrée de $\frac{3}{10}$ évaluée en décimales (par approximation). On porte sur AB, à partir de A, une longueur AD exprimée par le nombre trouvé, et on mène DE parallèle à BC.

11. Problème. *Diviser un triangle* ABC *en deux parties de grandeurs données par une parallèle à sa base.*

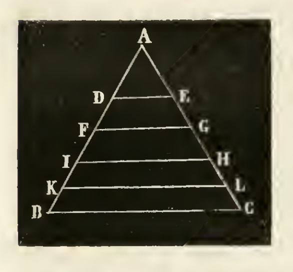
Ex. : Les parties données sont $15^{\text{ares}},25$ et $44^{\text{a}},85$.

Le triangle ABC contient $15^{\text{a}},25+44^{\text{a}},85$ ou $60^{\text{a}},10$. Il suffit évidemment de partager le triangle, comme il vient d'être indiqué, en parties proportionnelles à 15,25 et 44,85. Le rapport du triangle ADE au triangle ABC est celui de $15^{\text{a}},25$ à $60^{\text{a}},10$; ABC étant égal à $60^{\text{a}},10$, $ADE=15^{\text{a}},25$. La seconde partie DBCE vaut $60^{\text{a}},10-15^{\text{a}},25$ ou $44^{\text{a}},85$.

12. Problème. *Diviser un triangle* ABC *en un certain nombre de parties équivalentes par des parallèles au côté* BC.

Ex. : En cinq parties équivalentes.

Supposons le problème résolu et soient DE, FG, IH, KL les parallèles demandées. Chacune des cinq parties ADE, DFGE, ... est $\frac{1}{5}$ de ABC; nous en concluons (en les additionnant successivement) que



$$ADE = \frac{1}{5}\,ABC, \qquad AFG = \frac{2}{5}\,ABC,$$

$$AIH = \frac{3}{5}\,ABC, \quad AKL = \frac{4}{5}\,ABC, \quad \text{ou}$$

$\frac{ADE}{ABC} = \frac{1}{5}, \frac{AFG}{ABC} = \frac{2}{5}$; etc. D'après la théorie des triangles semblables, on a donc

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{1}{5}; \quad \overline{AD}^2 = \frac{1}{5}\,\overline{AB}^2; \quad \text{d'où} \quad AD = AB\sqrt{\frac{1}{5}};$$

$$\frac{\overline{AF}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{2}{5}; \quad \overline{AF}^2 = \frac{2}{5}\,\overline{AB}^2; \quad \text{d'où} \quad AF = AB\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

De même

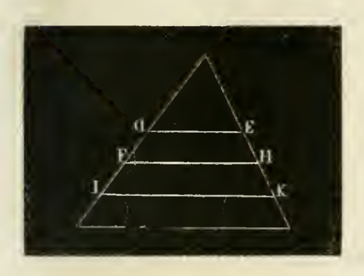
$$AI = AB\sqrt{\frac{3}{5}} \quad \text{et} \quad AK = AB\sqrt{\frac{4}{5}}.$$

Opérations. On mesure AB avec la chaîne; on multiplie la longueur trouvée successivement par $\sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}$ évaluées en décimales. Les quatre nombres trouvés expriment des longueurs qu'on porte sur AB à partir de A; soient AD, AF, AI, AK. On mène ensuite les parallèles DE, FG, IH, KL, et le partage est effectué.

13. Problème. *Diviser un triangle* ABC *en parties proportionnelles à des nombres donnés par des parallèles à sa base.*

Ex. : Les nombres donnés sont 2, 3, 5, 7.

Supposons le problème résolu par les lignes DE, FH, IK.



$2 + 3 + 5 + 7 = 17$. En raisonnant comme il est indiqué en arithmétique, on trouve que le triangle sera divisé comme il est demandé si la première partie ADE est les $\frac{2}{17}$ de ABC, la seconde partie les $\frac{3}{17}$ de ABC, etc. Cela posé,

$$\frac{ADE}{ABC} = \frac{2}{17}; \quad \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}} = \frac{2}{17}; \quad \text{d'où} \quad AD = AB\sqrt{\frac{2}{17}}$$

$$AFH = \frac{2}{17} + \frac{3}{17} \text{ ou } \frac{5}{17} \text{ de ABC}; \quad \frac{AFH}{ABC} = \frac{5}{17}; \quad \frac{\overline{AF}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{5}{17}$$

et $$AF = AB\sqrt{\frac{5}{17}}.$$

De même

$$AIK = \frac{2 + 3 + 5}{17} \text{ ou } \frac{10}{17} \text{ de ABC.}$$

On en conclut $$AI = AB\sqrt{\frac{10}{17}}.$$

Opérations. On mesure AB avec la chaîne; puis on multiplie successivement la longueur trouvée par $\sqrt{\frac{2}{17}}$, $\sqrt{\frac{5}{17}}$, $\sqrt{\frac{10}{17}}$ évaluées en décimales. Les nombres trouvés expriment des longueurs qu'on porte sur AB à partir du point A; supposons que ce soient AD. AF, AI. On mène par les extrémités D, E, I les parallèles DE, FH, IK, et le partage est effectué.

14. Problème. *Diviser un triangle* ABC *en parties de grandeurs données par des parallèles à la base* (fig. précéd.).

Ex. : Les parties doivent être 15 ares, 20 ares, 28 ares, 12 ares. Le triangle ABC contient $15 + 20 + 28 + 12$ ou 75 ares. Il suffit

évidemment de partager le triangle en parties proportionnelles aux nombres 15, 20, 28, 12. La première partie, égale aux $\frac{15}{75}$ de ABC (d'après l'arithmétique), contiendra 15 ares; la seconde 20 ares, etc.

En raisonnant comme dans le cas précédent, on trouve que

$$AD = AB\sqrt{\frac{15}{75}},\ AF = AB\sqrt{\frac{35}{75}},$$ etc. (fig. précédente).

Opérations. On mesure AB avec la chaîne. Etc.; de même que précédemment.

Les conditions du partage peuvent varier de bien des manières. On ramène toujours la question, en raisonnant préalablement comme il est indiqué en arithmétique ou en algèbre, à partager le triangle en parties proportionnelles à des nombres connus, et même à des nombres entiers (*).

(*) Les problèmes des nos 9, 10, 11, 12, 13, 14 peuvent se résoudre sur le plan du terrain de la manière indiquée. On peut aussi opérer comme il suit après avoir ramené la question à un partage du triangle en parties équivalentes, ou en parties proportionnelles à des nombres donnés, en raisonnant comme il est expliqué dans le texte.

Construction graphique (sur le plan du terrain).

Pour diviser un triangle ABC en cinq parties équivalentes ou en cinq parties proportionnelles à des nombres donnés, par des parallèles au côté BC, on divise le côté AB en cinq parties égales, ou en cinq parties proportionnelles aux nombres donnés; soient d, f, i, k les points de division (faites une figure d'après nos indications). On décrit une demi-circonférence sur AB comme diamètre; aux points d, f, i, k on élève des perpendiculaires à la rencontre de la demi-circonférence en d', f', i', k'. On rabat Ad' sur AB en AD, en décrivant un arc de cercle de A comme centre avec le rayon Ad'; on rabat de même Af', Ai', et Ak', en AF, AI, AK. Par les points D, F, I, K, on mène des parallèles à BC. La division est opérée; il n'y a plus qu'à transporter les lignes de partage sur le terrain.

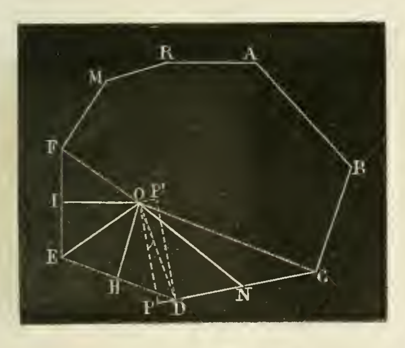
Pour justifier cette construction, il suffit d'observer que l'on doit avoir $\frac{ADE}{ABC}=\frac{Ad}{AB}$, puisque Ad est la première partie de AB divisée suivant les conditions prescrites. Or le triangle $Ad'B$ étant rectangle, $\frac{\overline{Ad'}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{Ad}{AB}$, ou $\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{Ad}{AB}$ (*Géom.*, n° 215, corol.) Mais $\frac{ADE}{ABC}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}^2}$; donc $\frac{ADE}{ABC}=\frac{Ad}{AB}$; ce qui doit être. De même on doit avoir $\frac{AFG}{ABC}=\frac{Af}{AB}$, etc.; on continue comme pour ADE, Ad et AD.

15. Les parts a faire dans un terrain doivent aboutir a un même point qui sera par exemple une maison ou une cour commune, un puits, un carrefour. La plupart des questions de ce genre se ramènent à la suivante que nous recommandons à l'attention du lecteur.

16. Problème. *Séparer dans un terrain une portion de grandeur donnée par des lignes partant d'un point donné 1° à l'intérieur, 2° sur le contour.*

1er Cas. *Le point donné est intérieur.* Le terrain peut avoir un contour rectiligne ou un contour irrégulier; nous le supposerons d'abord rectiligne. Supposons de plus que la portion à faire soit de $25^{\text{ares}},48 = 2548^{\text{m. c.}}$ (on réduit en mètres carrés).

1re Méthode. Soit OF la ligne à partir de laquelle on doit séparer cette superficie (si cette ligne n'était pas donnée, on joindrait le point O à un point quelconque F du contour). On abaisse la perpendiculaire OI sur FE; puis on mesure FE et OI. Avec ces éléments on calcule l'aire du triangle $\text{OFE} = \frac{1}{2}\,\text{FE} \times \text{OI}$. Si cette aire est plus petite que $25^{\text{ares}},48$, on évalue de même la surface du triangle OED, en abaissant la perpendiculaire OH et mesurant ED et OH; $\text{OED} = \frac{1}{2}\,\text{ED} \times \text{OH}$. On fait la somme des deux aires. Si cette somme est encore trop petite, on abaisse encore la perpendiculaire OP; on mesure OP et DC, et on évalue la surface du triangle $\text{ODC} = \frac{1}{2}\,\text{DC} \times \text{OP}$; puis on ajoute cette aire à la somme des deux autres. Supposons que la nouvelle somme soit égale à $27^{\text{ares}},84$; le pentagone OFEDC est trop grand de $2^{\text{ares}},36$, ou $236^{\text{m. c.}}$, il faut le diminuer. Pour cela, on calcule

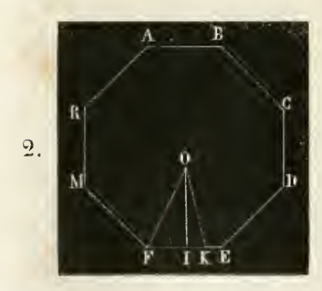


une longueur x telle que $\frac{1}{2}$ OP $\times x = 236$. Cette longueur x trouvée, on la porte sur CD à partir de C; soit $x = CN$; on trace ON. Le polygone OFEDN est la portion demandée; en effet, on a retranché de l'aire OFEDC le triangle ONC $= \frac{1}{2}$ OP $\times$ CN $= \frac{1}{2}$ OP $\times x$ $= 236^{m.\,c.}$, précisément ce qu'il y avait de trop.

La marche à suivre est évidente. Si le premier triangle OFE était trop grand, on le diminuerait immédiatement comme nous avons fait en terminant.

Autre méthode. Soit OF la ligne à partir de laquelle on doit séparer $25^{ares},48$. On abaisse sur le côté FE une perpendiculaire OI *que l'on mesure;* puis on calcule une longueur x telle que $\frac{1}{2}$ OI $\times x = 2548^{m.\,c.}$. On porte la longueur trouvée sur FE à partir de F. Il peut se présenter plusieurs cas :

2.





1° x est moindre que FE, $x = FK$; on trace FK (fig. 2); ou bien $x = FE$; on trace OE (fig. 3). Le triangle OFK ou le triangle OFE est la portion demandée, puisque sa surface est $\frac{1}{2}$ OI $\times x = 2548$.

2° x est plus grand que FE; $x = FE + 38^{m}$; $\frac{1}{2}$ OI $\times x = \frac{1}{2}$ OI $\times$ FE $+ \frac{1}{2}$ OI $\times 38$. Le triangle OFE qui a pour mesure $\frac{1}{2}$ OI $\times$ FE est trop petit de $\frac{1}{2}$ OI $\times 38$; il faut le compléter.

Pour cela, on abaisse sur ED une perpendiculaire OH que l'on mesure; puis on calcule une longueur y telle que $\frac{1}{2}\,\mathrm{OH} \times y = \frac{1}{2}\,\mathrm{OI} \times 38$. On porte sur ED, à partir de E, une longueur $\mathrm{EG} = y$, et on trace OG; le quadrilatère OFEG est la portion demandée. En effet, au triangle OFE on a ajouté le triangle $\mathrm{OEG} = \frac{1}{2}\,\mathrm{OH} \times y = \frac{1}{2}\,\mathrm{OI} \times 38$, précisément ce qui manquait.

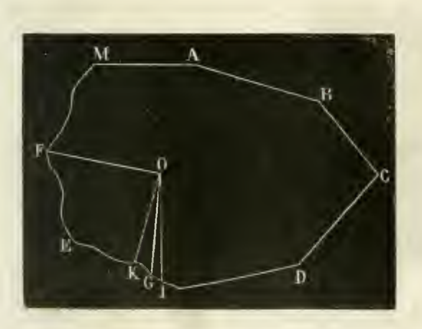


Il peut arriver que y soit plus grand que ED (fig. 1). Soit $y = \mathrm{ED} + 15^{m}$. Le triangle $\mathrm{OED} = \frac{1}{2}\,\mathrm{OH} \times \mathrm{ED}$ est trop petit de $\frac{1}{2}\,\mathrm{OH} \times 15$; il faut le compléter. Pour cela, on abaisse sur DC une perpendiculaire OP que l'on mesure; puis on calcule une longueur z telle que $\frac{1}{2}\,\mathrm{OP} \times z = \frac{1}{2}\,\mathrm{OH} \times 15$. On porte cette longueur z calculée sur DC à partir de D; soit $z = \mathrm{DN}$ (*fig.* 1). On trace ON; le pentagone OFEDN est évidemment la portion demandée: en effet, $\mathrm{ODN} = \frac{1}{2}\,\mathrm{OP} \times z = \frac{1}{2}\,\mathrm{OH} \times 15$; c'est précisément ce qui manquait en dernier lieu.

Ainsi de suite si z était plus grand que DC.

17. Cas particulier. *Le contour du terrain est irrégulier du côté où on doit prendre la portion demandée.*

Remarquons d'abord que les lignes plus ou moins sinueuses qui peuvent border un terrain sont le plus souvent des lignes brisées. Quoi qu'il en soit, le plus simple suivant nous est d'opérer comme il suit. Ayant mené une première ligne OF (donnée ou arbitraire) qui doit limiter d'un côté la portion à séparer, on mène une seconde ligne OK,



à vue d'œil, de manière que la surface enfermée OFEK ait à peu près l'étendue indiquée de la portion à prendre. On mesure cette surface OFEDK comme il a été indiqué dans l'arpentage. Supposons qu'elle soit trop petite; on tire une seconde ligne OG, telle que l'aire OKG soit à peu près ce qui manque, et on mesure cette surface, ainsi de suite. Il est évident que la surface à ajouter devenant bientôt très-petite, on pourra considérer la partie du contour qui doit la border comme droite ou rectiligne, et appliquer pour déterminer cette portion complémentaire la méthode du premier cas.

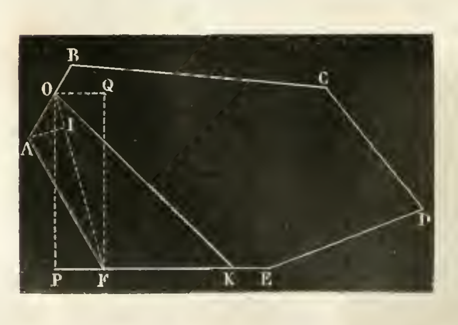
Quand la surface évaluée, terminée par la dernière ligne OG ou OI, est trop grande, au lieu d'ajouter, on retranche une certaine étendue de terrin déterminée de la même manière.

Si la portion à séparer est trop grande pour qu'on puisse délimiter du premier abord une surface à peu près égale, on subdivise l'étendue donnée en plusieurs parties; on prend à peu près la première partie en traçant deux lignes telles que OF, OK. Ayant mesuré la surface ainsi limitée, on prend une seconde partie à partir de OK, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait délimité une étendue à peu près égale à la portion demandée. Alors on termine, comme nous l'avons dit, en ajoutant ce qui manque, ou en retranchant ce qu'il y a de trop.

Remarque générale. La ligne OF joint le point O à un *point quelconque* du contour. Notre méthode s'applique donc dans le cas où cette ligne est donnée *à priori;* il n'y a rien à changer.

18. 2ᵉ Cas. *Le point donné* O *est situé sur le contour du terrain.*

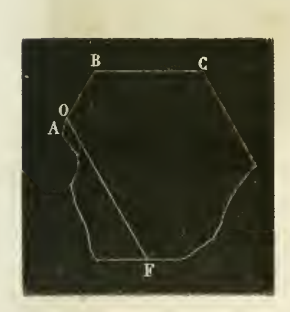
Exemple. On propose de séparer dans le terrain ABCDEF une portion égale à $47^{\text{ares}},85$ par une ligne partant du point O sur le contour. On trace OF et on mesure le triangle OAF. Pour ne pas sortir du terrain on choisit la base OF sur laquelle on abaisse la perpendiculaire AI; $OAF = \frac{1}{2} OF \times AI$; on mesure AI et OF et on calcule cette aire. On trouve $12^{\text{ares}},41$; il



manque $35^{ares},44$; il faut évaluer le triangle OFE. La perpendiculaire abaissée de O sur FE sortirait du terrain; pour obvier à cet inconvénient, on peut mener FQ perpendiculaire sur FE, puis OQ perpendiculaire sur FQ. Ayant mesuré $FQ = OP$ et FE on calcule l'aire du triangle $OFE = \frac{1}{2} FE \times FQ$.

On trouve $44^{ares},92$. Le quadrilatère OAFE contient $57^{ares},33$; c'est $9^{ares},48$ ou $948^{m.c.}$ de trop; il faut les retrancher. On calcule une longueur x telle que $\frac{1}{2}\, x \times FQ = 948$, ou $x = \frac{948 \times 2}{FQ}$. Ayant trouvé x, on porte une longueur EK égale à x sur FE à partir de E; on obtient ainsi le point K; on trace OK sur le terrain. OAFK est la portion demandée; en effet on a retranché de OAFE le triangle $OKE = \frac{1}{2} FQ \times x = 948$, précisément ce qu'il y avait de trop.

Si le contour est irrégulier, on trace à partir de O, une ligne OF qui sépare une portion de terrain OAF à peu près égale à celle de la portion démandée. Puis on l'augmente ou on la diminue si elle est trop grande ou trop petite, comme il a été indiqué n° 17.

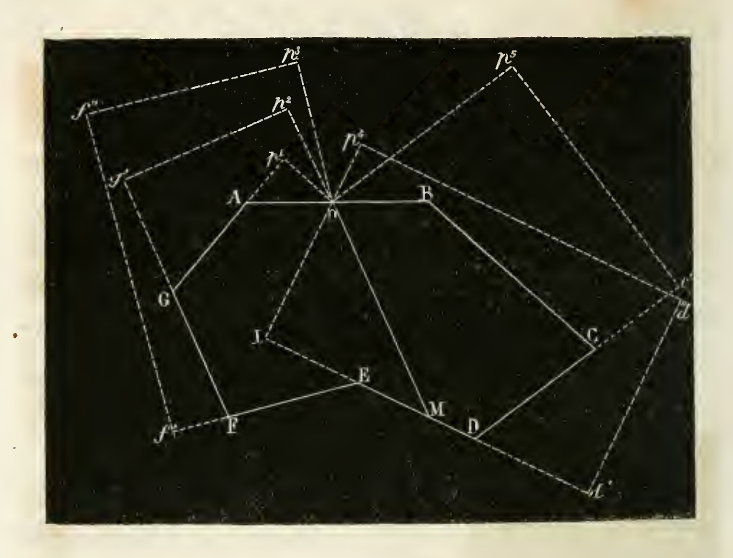


19. Cas particulier. *L'intérieur du terrain dans lequel on doit prendre une ou plusieurs portions n'est pas accessible pour effectuer les opérations préliminaires. On ne doit tracer les lignes qui limitent la portion ou les portions demandées qu'après avoir déterminé leurs extrémités.*

Soit proposé de séparer sur un terrain de ce genre ABCDEFG, un bois par exemple, une portion de $258^{ares},42$, par une ligne droite partant d'un point donné O du contour.

On fait un croquis ABCDEFG du contour, sur lequel on étudie la question. Comme précédemment, on est conduit à évaluer la surface du triangle OAG : en prenant pour base AG, on peut me-

surer la hauteur sans opérer à l'intérieur du bois; en effet, il suffit de prolonger AG et d'abaisser sur le prolongement la perpendiculaire Op_1. Le triangle OAG $= \frac{1}{2}$ AG $\times Op_1$; on mesure AG



et Op_1, et on calcule cette aire. On trouve 34ares,24; il faut donc continuer et mesurer le triangle OGF. La perpendiculaire menée de O sur la droite GF, même prolongée, traverserait le bois; pour obvier à cet inconvénient, on prolonge FG et on élève sur le prolongement une perpendiculaire $g'p_2$ qui passe à côté du bois vis-à-vis de O; puis on abaisse Op_2 perpendiculaire $g'p_2$. Op_2 étant parallèle à g'F, la distance de O à GF est égale à p_2g'; le triangle OGF $= \frac{1}{2}$ GF $\times g'p_2$: on mesure GF et $g'p_2$ et on calcule cette aire. On trouve 97ares,82; la somme OAG + OGF = 132ares,06; ce n'est pas assez; il faut mesurer le triangle OFE. Pour déterminer la hauteur de ce triangle, c'est-à-dire la distance de O à FE, on prolonge FE et on lui élève une perpendiculaire $f'f''$ qui passe à côté du bois. La perpendiculaire menée de O sur $f'f''$ traverserait le bois. Pour obvier à cet inconvénient, on prolonge suffisamment $f'f''$ et on lui élève une perpendiculaire

$f''p_3$ qui passe à côté du bois vis-à-vis de O; enfin on abaisse la perpendiculaire Op_3 sur $f''p_3$. La distance du point O à EF est évidemment égale à $f'f'' - Op_3$; l'aire du triangle OFE est donc $\frac{1}{2}$ EF$(f'f'' - Op_3)$: on mesure EF, $f'f''$ et Op_3 et on calcule cette aire. On trouve 72ares,28; en ajoutant aux aires déjà trouvées on trouve pour somme 204ares,34; ce n'est pas encore assez; il faut mesurer le triangle OED. Pour avoir la hauteur de ce triangle, on prolonge DE à l'extérieur du bois, et on lui mène une perpendiculaire $d'd''$ qui passe à côté du bois. La perpendiculaire abaissée de O sur $d'd''$ traverserait le bois; on prolonge suffisamment $d'd''$ et on lui mène une perpendiculaire $d''p_4$, qui passe à côté du bois vis-à-vis de O; on abaisse la perpendiculaire Op_4 sur $d''p_4$. La distance de O à EF est égale à $d'd'' - Op_4$ et l'aire du triangle ODE est $\frac{1}{2}$ DE $(d'd'' - Op_4)$; on mesure EF, $d'd''$ et Op_4 et on calcule cette aire. On trouve 92ares,57; la figure OAGFED vaut 296ares,91; c'est 38ares,49 ou 3849m. c. de trop, il faut les retrancher. Pour cela, connaissant la distance de O à ED qui est égale à $d'd'' - Op_4$, on calcule une longueur x telle que $\frac{1}{2} x \times (d'd'' - Op_4) = 3849$. On porte cette longueur x une fois trouvée sur ED à partir de E; supposons que cette longueur finisse en M, la ligne OM tracée à travers le bois séparera à gauche la portion de terrain demandée. En effet, le polygone OAGFDE était trop grand de 38ares,49, et nous l'avons diminué d'un triangle OMD ayant cette superficie.

Pour tracer la droite OM à travers le bois, il suffit de connaître l'angle AOM, ou l'angle OME. Abaissons sur le croquis la perpendiculaire OI sur ME prolongée; $OI = d'd'' - Op_4$. On obtiendra IM en retranchant Md' de $d''p_4$ qu'on peut mesurer $(Id' = p_4d'')$. Avec les longueurs OI et IM convenablement réduites, on construit un triangle rectangle semblable à OIM du terrain; ce triangle fait connaître l'angle OME. Il est alors facile de tracer la ligne MO avec la boussole ou autrement.

Problème. *Tracer à travers un bois, dont on peut faire le tour, une ligne qui joigne deux points donnés* O *et* M *de son contour.* (Même figure.)

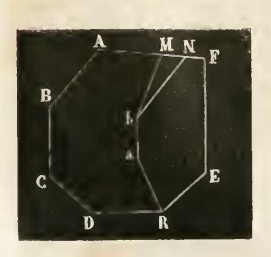
On construit la figure extérieure $MDd'd''p_4O$ comme nous l'avons indiquée; on mesure Md', $d'd''$, Op_4, $d''p_4$ et on achève comme nous venons de le dire pour la droite OM du problème précédent.

Remarque. Il serait peut-être plus simple, pour résoudre le problème précédent, de lever le plan du contour du terrain, en l'entourant par exemple d'un rectangle sur les côtés duquel on abaisserait des perpendiculaires AA', BB', CC', etc. des divers sommets et une perpendiculaire OO' du point O. Ayant construit le plan *abcdefg* du bois, on y sépare du côté convenable, par une ligne issue du point *o*, une surface égale à la surface indiquée, 258^{ares},42 réduite à l'échelle, par une des méthodes du n° 16. Connaissant la direction de la ligne de partage *om* par l'angle *aom*, on trace cette ligne dans le bois au moyen de la boussole.

Si le contour du terrain était irrégulier, c'est-à-dire comprenait des lignes courbes ou trop sinueuses, on ne pourrait guère faire autrement que d'en lever le plan, puis d'opérer la division du terrain sur le papier par la méthode du n° 16. Cela fait, on trace la ligne de partage, dont on connaît le point de départ O et la direction.

20. Problème. *Au milieu d'une prairie* ABCDREF, *dont le contour est régulier ou irrégulier, se trouvent deux arbres* a, b. *Il s'agit de tracer à partir du point* R, *en passant par* a *et* b, *une ligne brisée terminée au contour, qui partage le polygone en parties proportionnelles à des nombres donnés, ou suivant des conditions données.*

On mesure le terrain (arpentage); on divise *par le calcul* la surface trouvée en deux parties suivant les conditions du problème (*Arithmétique* ou *Algèbre*); soient *s* et *s'* ces parties. Cela fait, on trace provisoirement, en passant par *a* et *b*, une ligne brisée R*ab*N qui sépare sur la droite du terrain une étendue à peu près égale à celle de la portion, qui doit se trouver de ce côté, *s* par exemple. On mesure la portion de terrain R*ab*NFE, en profitant de ce qui a été déjà fait. On fait la différence entre *s* et la surface que l'on trouve; supposons

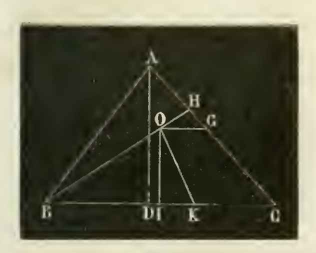


cette surface trop petite de $2^{ares},24$. On ajoute à R*ab*NFE, à partir de *b*N, une portion N*b*M de terrain égale à $2^{ares},24$ (à l'aide d'une ligne *b*M issue du point *b*); ce que nous savons faire (n° 16 ou n° 17). La ligne R*ab*M est évidemment la ligne demandée (*).

21. La question du n° 15 étant résolue en général, nous allons traiter quelques-unes de celles qu'on ramène à celle-là. Nous engageons beaucoup le lecteur à répéter ce que nous avons fait dans les n°s 16, 17, ..., 20 chaque fois que nous y renvoyons dans la résolution des questions suivantes, afin de s'habituer à la pratique de ces méthodes importantes. Nous répétons nous-même dans plusieurs endroits.

22. Problème. *Partager un triangle en trois parties égales par des droites menées d'un même point intérieur donné* O.

On mesure ce triangle ABC $= \frac{1}{2}$ BC $\times$ AD; on prend le tiers de la surface trouvée; supposons que ce tiers soit $9^{ares},38$. On tire OB; puis on sépare dans le triangle, à partir de OB, une portion de terrain égale à $9^{ares},38$ comme il a été indiqué n° 16, 2e méthode. Soit OBK cette première portion; OBK $= \frac{1}{3}$ ABC. A partir de OK, en continuant à droite, on sépare une seconde portion de terrain égale à $9^{ares},38$ (n° 16); soit OKCG cette seconde portion; OKCG $= \frac{1}{3}$ ABC. Le quadrilatère OGAB qui reste est évidemment le troisième tiers.



Il est aussi facile de *diviser un triangle* ABC *en un nombre donné quelconque de parties équivalentes par des lignes partant du même point donné* O.

23. Problème. *Partager un triangle en trois parties de gran-*

(*) Sur le plan du terrain, on résoudrait les problèmes précédents (n°s 16, 17, 18, etc.) de la même manière, après avoir réduit les surfaces données d'après l'échelle du plan. Les constructions faites, on trace les lignes de partage seulement sur le terrain.

deurs données par des lignes partant d'un même point intérieur donné O (figure précédente).

Supposons que les parts à faire soient $9^{ares},38$; $10^{ares},82$; $12^{ares},24$. Le triangle ABC est la somme des trois surfaces. On trace la ligne OB; puis on sépare dans le triangle, à partir de OB, une portion de terrain égale à $9^{ares},38$ (nº 16); soit OBK. A partir de OK, on en sépare une deuxième portion égale à $10^{ares},82$; soit OKCG. Le quadrilatère restant OGAB est évidemment égal à $12^{ares},24$.

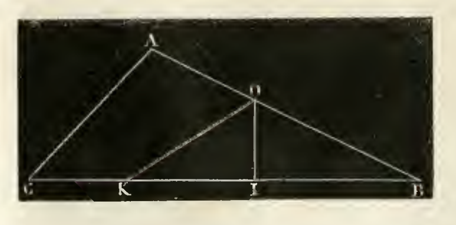
On partage de même *un triangle donné* ABC *en un nombre quelconque de parties de grandeurs données, par des lignes partant d'un point intérieur donné.*

24. Problème. *Partager un triangle* ABC *en parties proportionnelles à des nombres donnés, ou suivant des conditions fixées par des lignes partant d'un point intérieur donné* O.

On mesure la surface du triangle; $ABC = \frac{1}{2} BC \times AD$. On divise cette surface par le calcul proportionnellement aux nombres donnés, ou suivant les conditions fixées (*Arithm.* ou *Algèbre*). Soient s, s', s'', ... les parties calculées. On est ramené au cas précédent. On divise le triangle en parties égales à s, s', s'', ..., par des lignes partant du point O (nº 16).

25. Problème. *Partager un terrain de forme triangulaire en deux parties équivalentes, de manière que chacune d'elles aboutisse à une maison* O, *située sur l'un des côtés.*

On mesure le triangle ABC; $ABC = \frac{1}{2} BC \times AD$. On divise la surface trouvée par 2; supposons que la moitié soit de $9^{ares},38$. On sépare, à partir de OB, une portion de terrain égale à $9^{ares},38$ en appliquant l'une des méthodes du nº 16 ou du nº 18 (*), soit ABK la portion séparée; le quadrilatère OKCA est évidemment la seconde moitié.



(*) Par ex., on abaisse de O sur BC une perpendiculaire OI que l'on mesure;

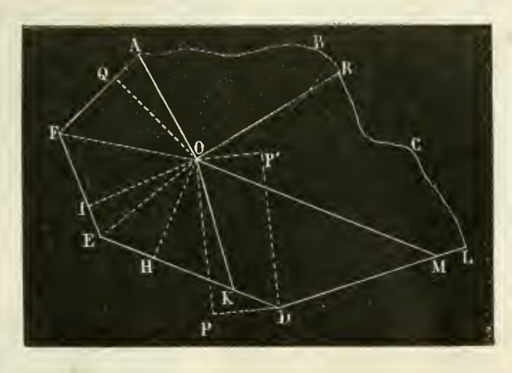
On divise de même *un terrain en deux parties de grandeurs données quelconques* s *et* s', *ou en deux parties déterminées par des conditions données*, de manière à ce qu'elles aboutissent à une maison O.

26. Les mêmes problèmes se résolvent aussi aisément pour un polygone quelconque.

PROBLÈME. *Diviser un terrain polygonal en un nombre donné de parties égales, par des lignes partant d'un point donné intérieur* O.

Par ex. : *en huit parties*. On mesure le polygone (arpentage). On divise la surface trouvée par 8; supposons que l'une des parts soit de $12^{ares},85$. On joint le point O à un des points F du contour; on prend, à partir de OF, une portion du terrain égale à $12^{ares},85$; soit OKF cette 1re portion (figure 2 du n° 16). A partir de OK, on sépare plus loin une seconde part égale à $12^{ares},85$. Ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait séparé 7 parts; le reste sera la 8e part.

27. PROBLÈME. *Partager un terrain* ABCLDEF *en quatre parties respectivement égales à* $48^{ares},54$; $36^{ares},85$; $41^{ares},20$ *et* $21^{ares},38$ *par des lignes issues du point intérieur* O, *à partir de la ligne* OA.



On mesure les triangles OAF, OFE, etc., jusqu'à ce que la somme des aires atteigne et surpasse $48^{ares},54$. Supposons que AOF + OFE + OED = $53^{ares},94$; c'est $5^{ares},40$ de trop. On calcule une longueur x telle que $\frac{1}{2}x \times \text{OH} = 540$, et on porte x sur ED à

---

on calcule une longueur x telle que $\text{OI} \times x = 938$. Soit $x = \text{BK}$; on porte cette longueur sur BC et on trace OK.

partir de D; ce qui donne le point K. On trace OK; OAFEK est la portion demandée, puisqu'on a retranché du polygone OAFED un triangle $OKD = \frac{1}{2} DK \times OH = \frac{1}{2} x \times OH = 540$, précisément ce qu'il y avait de trop.

A partir de OK on sépare une nouvelle portion égale à 36ares,85. Pour cela on mesure le triangle ODL et on l'ajoute à OKD = 5,40. On trouve 39ares,10; c'est 2ares,25 de trop. On les retranche comme on a retranché tout à l'heure 5ares,40 au moyen de la ligne OM, OKM est la seconde portion.

A partir de OM on sépare une 3e portion égale à 41ares,20. Le terrain devenant irrégulier, on applique la méthode expliquée n° 17. On est ainsi conduit à tracer la ligne OR; cette ligne tracée l'opération est terminée. Le terrain étant égal à 48ares,54 + 36ares,85 + 41ares,20 + 21ares,38, la dernière partie OABR est évidemment égale à 21ares,38.

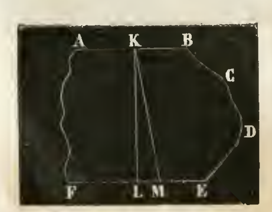
28. Problème. *Partager un terrain polygonal en parties proportionnelles à des nombres donnés, ou suivant des conditions fixées, par des lignes partant d'un même point intérieur donné.*

On mesure la surface totale de ce polygone (arpentage); on divise *par le calcul* la surface trouvée en parties s, s', s'', ..., suivant les conditions indiquées. Puis on décompose le terrain en parties égales à s, s', s'', ..., comme il est expliqué n° 27.

29. Problème. *Partager un quadrilatère dont on connaît la surface en parties égales ou de grandeurs données quelconques, par des lignes partant d'un point donné.*

Nous venons de résoudre ce problème pour un polygone quelconque. Appliquez au quadrilatère.

30. Les mêmes partages peuvent se faire dans un terrain terminé par un contour irrégulier. La grandeur des parts une fois déterminée, on sépare chacune d'elles à partir d'une ligne OF ou OK, etc., comme il a été expliqué à propos de ce cas particulier, n° 17. Voici un exemple.



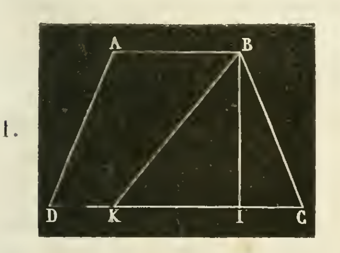
Problème. *Partager un têrain de forme*

irrégulière en deux parties égales, par une ligne aboutissant à un point donné K.

On trace une ligne KL qui, partant de K, divise à peu près le terrain en deux parties équivalentes (à vue d'œil). On mesure chacune de ces parties (arpentage), et on retranche l'une de l'autre les surfaces trouvées; soit d la différence ($s = s' + d$); on divise la différence d par 2. On sépare, à partir de KL, sur la plus grande partie, à l'aide d'une nouvelle ligne issue de K, une portion de terrain égale à $\frac{d}{2}$, que l'on détermine en suivant la marche indiquée n° 17, si le contour est irrégulier à partir de L, ou bien par la méthode du n° 16 dans le cas contraire. La nouvelle ligne KM est la ligne de partage demandée $\left(s - \frac{d}{2} = s' + \frac{d}{2}\right)$.

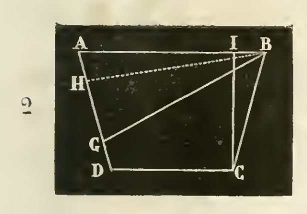
31. PROBLÈME. *Partager un trapèze en deux parties égales, par une ligne partant d'un des sommets.*

Il y a deux cas à considérer : 1° le sommet donné est sur la petite base (*fig.* 1); 2° il est sur la grande base (*fig.* 2).

1.


1er CAS. Ayant mesuré les bases AB, CD, on prend sur CD une longueur $CK = \frac{1}{2}(AB + CD)$ et trace BK. Le triangle BCK est la moitié du trapèze. (Comparez leurs aires.)

2e CAS. Le triangle BCD est alors moindre que la moitié du trapèze; la ligne de division doit aller au côté AD (*fig.* 2). On abaisse de B sur AD la perpendiculaire BH que l'on mesure (*fig.* 2). Ayant mesuré la hauteur CI du trapèze, on calcule une longueur x telle que $BH \times x = \frac{1}{2} CI \times (AB + CD)$. On porte la longueur trouvée sur AD à partir de A; soit $x = AG$; on trace BG. Le triangle BAG est la moitié du trapèze. (Comparez leurs aires.)

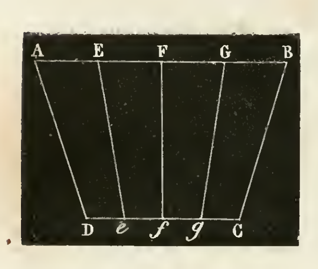
2


32. *Les deux parts à faire* s *et* s' *sont inégales.*

On sépare une 1[re] portion égale BCDG à s, à partir de BC, en suivant la marche indiquée n° 16. Le reste BGA est la seconde parts s', puisque le trapèze est égale à $s + s'$.

33. Problème. *Partager un trapèze en parties égales par des lignes joignant les deux bases.*

Par ex. : en 4 parties égales. On divise chacune des bases en 4 parties égales ; on numérote les points de division à partir du même côté AD. Puis on joint les points de division de même rang, et le partage est effectué. En effet, les parts sont des trapèzes de même hauteur que le trapèze donné ; leur rapport est donc celui des sommes de bases.



Or $AE + De = \dfrac{AB + DC}{4}$, etc.

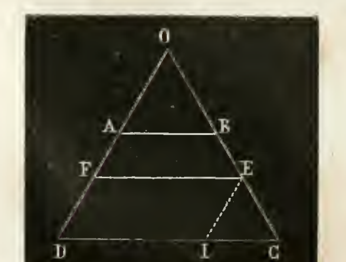
34. Les deux questions les plus usuelles du partage des terrains sont :

1° Celle que nous avons complétement résolue dans les n[os] 16 et suivants.

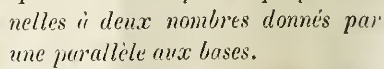
2° Celle-ci : *Séparer dans un terrain une ou plusieurs parties de grandeurs données par une ligne ou par des lignes ayant une direction donnée ou des directions données.*

On résout cette seconde question générale en résolvant une ou plusieurs fois cette question élémentaire : *Diviser un triangle ou un trapèze en parties proportionnelles à des nombres donnés par une parallèle à sa base ou à ses bases.* Nous avons résolu cette question élémentaire pour le cas d'un triangle (n[os] 9 et suivants) ; nous allons la résoudre pour un trapèze.

35. Problème. *Diviser un trapèze* ABCD *en parties proportionnelles à deux nombres donnés par une parallèle aux bases.*



Soient m et n les nombres donnés ; on veut que $\dfrac{ABEF}{FECD} = \dfrac{m}{n}$.



Opérations. On mesure les bases AB, CD ; soient b et B les longueurs trouvées. On calcule une longueur

$$x = \sqrt{\frac{B^2 \times m + b^2 \times n}{m+n}}. \qquad (\alpha)$$

On porte cette longueur x trouvée sur DC à partir d'une extrémité D; soit $DI = x$. On mène IE parallèle à DA, puis EF parallèle à DC, et le partage est effectué.

Exemple. Partager le trapèze ABCD en parties proportionnelles aux nombres 3 et 5; $\frac{ABEF}{FECD} = \frac{3}{5}$.

On calcule $x = \sqrt{\frac{B^2 \times 3 + b^2 \times 5}{8}}$; on prend $DI = x$; etc.

Démonstration. Supposons le problème résolu et soit EF la ligne de partage. Imaginons les côtés DA, CB prolongés jusqu'à leur rencontre en O, et désignons le triangle OAB par t, OFE par T′, ODC par T, et EF par x. $ABEF = T' - t$; $FECD = T - T'$; on doit avoir

$$\frac{T' - t}{T - T'} = \frac{3}{5}. \qquad (1)$$

Les triangles semblables t, T′, T sont proportionnels aux carrés de leurs côtés homologues

$$\frac{t}{b^2} = \frac{T'}{x^2} = \frac{T}{B^2} = \text{un certain nombre } k;$$

d'où $\quad t = b^2 \times k; \quad T' = x^2 \times k; \quad T = B^2 \times k.$

En substituant ces valeurs dans l'égalité (1), on trouve

$$\frac{x^2 \times k - b^2 \times k}{B^2 \times k - x^2 \times k} = \frac{3}{5}, \quad \text{qui se réduit à} \quad \frac{x^2 - b^2}{B^2 - x^2} = \frac{3}{5}.$$

D'où résulte $5x^2 - 5b^2 = 3B^2 - 3x^2$. Ajoutons des deux parts $5b^2 + 3x^2$; on trouve ainsi après réduction

$$5x^2 + 3x^2 = 3B^2 + 5b^2,$$

ou

$$x^2(3 + 5) = 3B^2 + 5b^2;$$

d'où

$$x^2 = \frac{3B^2 + 5b^2}{3 + 5},$$

et enfin

$$x = \sqrt{\frac{B^2 \times 3 + b^2 \times 5}{3 + 5}}. \quad \text{C. Q. F. D}$$

56. Ce raisonnement est général ; on peut le faire sur des nombres quelconques. Si l'on désigne en général les nombres donnés par les lettres m et n, en raisonnant sur ces nombres m et n comme nous l'avons fait sur 3 et 5, c'est-à-dire en posant d'abord $\frac{T'-t}{T-T'}=\frac{m}{n}$ et continuant de même, on trouve aisément la formule

$$x=\sqrt{\frac{B^2\times m+b^2\times n}{m+n}} \qquad (a)$$

ci-dessus indiquée.

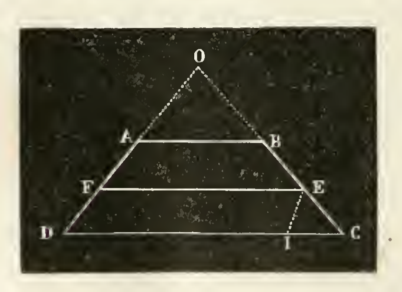
57. Problème. *Diviser un trapèze en deux parties égales par une parallèle à ses bases.*

Ce problème n'est qu'un cas particulier du précédent. En effet, diviser le trapèze en deux parties égales, c'est le diviser en parties proportionnelles à deux nombres égaux ; c'est le cas de $m=n$, ou $m=1$, $n=1$. Remplaçons donc n par m, ou faisons $m=1$ et $n=1$; on trouve, de l'une ou l'autre manière, après réduction,

$$x=\sqrt{\frac{B^2+b^2}{2}}.$$

De là cette règle :

Opérations. On mesure les deux bases AB, DC ; soient b et B les longueurs trouvées ; puis on calcule une longueur $x=\sqrt{\frac{B^2+b^2}{2}}$. Cette longueur calculée, on la porte sur la grande base DC à partir d'une extrémité D ; soit $x=$ DI. Par le point I on mène une parallèle EI à DA, à la rencontre du côté BC en E. Par le point E on mène EF parallèle aux bases CD, AB, et le partage est effectué.



Application. Soit $B=45^{m},20$; $b=36^{m},40$.

$$x=\sqrt{\frac{(45,20)^2+(36,40)^2}{2}}.$$

Ce problème étant très-simple en lui-même, on peut demander de le résoudre directement. Nous allons le faire à titre d'exercice.

Supposons le problème résolu et soit EF la ligne de partage. Imaginons qu'on prolonge les côtés non parallèles DA, CB jusqu'à leur rencontre en O. Désignons, pour abréger, le triangle OAB par t, OFE par T′, OCD par T et EF par x. Le trapèze ABEF $=$ T′ $-$ t; FECD $=$ T $-$ T′. On demande que ABEF $=$ FECD, ou T′ $-$ t $=$ T $-$ T′. (1)

Les triangles semblables t, T′, T sont proportionnels aux carrés de leurs côtés homologues.

$$\frac{T}{B^2} = \frac{T'}{x^2} = \frac{t}{b^2} = \text{un certain nombre } k.$$

Donc $\quad T = B^2 \times k; \quad T' = x^2 \times k \quad \text{et} \quad t = b^2 \times k.$

Substituant ces valeurs dans l'égalité (1), on trouve

$$x^2 \times k - b^2 \times k = B^2 \times k - x^2 \times k,$$

qui se réduit à $\quad x^2 - b^2 = B^2 - x^2, \quad$ (2)

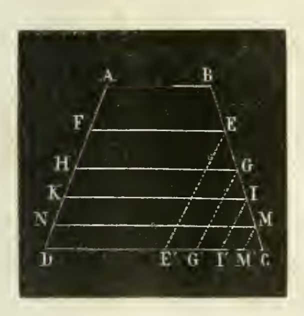
puisqu'on peut diviser tous les termes par k.

En ajoutant $b^2 + x^2$ aux deux nombres de l'égalité (2), on trouve, réductions faites,

$$2x^2 = B^2 + b^2; \quad \text{d'où} \quad x^2 = \frac{B^2 + b^2}{2} \quad \text{et} \quad x = \sqrt{\frac{B^2 + b^2}{2}};$$

d'où la construction indiquée.

58. Problème. *Partager un trapèze en un certain nombre de parties équivalentes par des parallèles à ses bases.*



Par exemple en 5 parties équivalentes.

Ce problème se ramène au premier (n° 35). En effet, supposons le problème résolu et soient FE, HG, KI, NM les lignes de partage. Chacun des trapèzes partiels ABEF, FEGH, etc., doit être la 5ᵉ partie du trapèze donné ABCD; on conclut de là que

$$\text{ABEF} = \frac{1}{5}\,\text{ABCD},\quad \text{FECD} = \frac{4}{5}\,\text{ABCD};\quad \text{donc}\quad \frac{\text{ABEF}}{\text{FECD}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{ABGH} = \frac{2}{5}\,\text{ABCD},\quad \text{HGCD} = \frac{3}{5}\,\text{ABCD};\quad \text{donc}\quad \frac{\text{ABGH}}{\text{HGCD}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{ABIK} = \frac{3}{5}\,\text{ABCD},\quad \text{KICD} = \frac{2}{5}\,\text{ABCD};\quad \text{donc}\quad \frac{\text{ABIK}}{\text{KICD}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{ABMN} = \frac{4}{5}\,\text{ABCD},\quad \text{NMCD} = \frac{1}{5}\,\text{ABCD};\quad \text{donc}\quad \frac{\text{ABMN}}{\text{NMCD}} = \frac{4}{1}.$$

C'est-à-dire que la ligne EF doit diviser le trapèze donné ABCD en parties proportionnelles aux nombres 1 et 4 ; EG doit diviser le même trapèze en parties proportionnelles aux nombres 2 et 3; etc. Chacune des lignes EF, GH, IK, MN peut donc être calculée à l'aide de la formule (α) page 101.

Pour EF, $m = 1$, $n = 4$; $\text{EF} = \sqrt{\dfrac{B^2 + b^2 \times 4}{5}}$

Pour GH, $m = 2$, $n = 3$; $\text{GH} = \sqrt{\dfrac{B^2 \times 2 + b^2 \times 3}{5}}$

Pour IK, $m = 3$, $n = 2$; $\text{IK} = \sqrt{\dfrac{B^2 \times 3 + b^2 \times 2}{5}}$

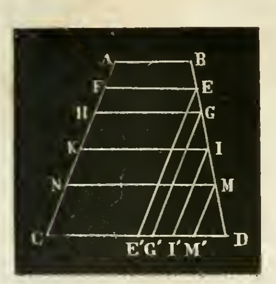
Pour MN, $m = 4$, $n = 1$; $\text{MN} = \sqrt{\dfrac{B^2 \times 4 + b^2}{5}}$.

Opérations. On mesure les bases AB, CD ; soient b, B les longueurs trouvées. On calcule les longueurs EF, GH, IK, MN, d'après les égalités précédentes. On porte les longueurs trouvées sur DC à partir de D; soient DE', DG', DI', DM' ces longueurs. On mène les parallèles E'E, G'G, I'I, M'M à DA, à la rencontre de BC. Enfin on mène les parallèles EF, GH, IK, MN à BC, et le partage est effectué.

59. Problème. *Partager un trapèze* ABCD *en parties proportionnelles à des nombres donnés par des parallèles à ses bases.*

Par exemple aux nombres 3, 5, 6, 7 et 11.

Soient EF, GH, IK, MN les lignes de partage. Désignons par s le $\frac{1}{3}$ de la première partie ABEF.



$$s = \frac{ABEF}{3} = \frac{FEGH}{5} = \frac{HGIK}{6} = \frac{KIMN}{7} = \frac{NMCD}{11}.$$

Par conséquent $ABEF = 3s$; $FEGH = 5s$; $HGIK = 6s$; $KIMN = 7s$; $NMDC = 11s$. Additionnons tous ces trapèzes; $ABCD = 32s$. Cela posé, il est évident que

$$\begin{aligned} ABEF &= 3s, \quad \text{et} \quad FEDC = 29s \\ ABGH &= 8s, \quad \text{et} \quad HGDC = 24s \\ ABIK &= 14s, \quad \text{et} \quad KIDC = 18s \\ ABNM &= 21s, \quad \text{et} \quad NMDC = 11s. \end{aligned}$$

La ligne EF doit donc diviser le trapèze donné ABDC en parties proportionnelles aux nombres 3 et 29; GH doit le diviser en parties proportionnelles aux nombres 8 et 24; etc. On peut donc calculer chacune des lignes EF, GH, IK, MN à l'aide de la formule (α) (page 104).

Pour EF, $m = 3$, $n = 29$; $EF = \sqrt{\frac{B^2 \times 3 + b^2 \times 29}{32}}$

Pour GH, $m = 8$, $n = 24$; $GH = \sqrt{\frac{B^2 \times 8 + b^2 \times 24}{32}}$

Pour IK, $m = 14$, $n = 18$; $IK = \sqrt{\frac{B^2 \times 14 + b^2 \times 18}{32}}$

Pour MN, $m = 21$, $n = 11$; $MN = \sqrt{\frac{B^2 \times 21 + b^2 \times 11}{32}}$.

Opérations. On mesure les bases AB, CD; soient b et B les longueurs trouvées. On calcule les longueurs EF, GH, IK, MN d'après les égalités précédentes. On porte ces longueurs trouvées sur DC à partir de l'une des extrémités C; supposons que CE', CG', CI',

CM′ soient ces longueurs. On mène les parallèles E′E, G′G, etc., à CA; puis les parallèles EF, GH, IK, MN à CD, et le partage est effectué.

40. Remarque. On ramène donc facilement au problème du n° 35 toutes les questions où il s'agit de diviser un trapèze en parties proportionnelles à des nombres donnés quelconques entiers, fractionnaires ou mêmes incommensurables. (Les nombres incommensurables, tels que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc., se remplacent par des valeurs approchées.)

Quand les nombres donnés sont fractionnaires, il est commode de les réduire au même dénominateur, puis de supprimer les dénominateurs.

Soient par ex. : $2\,{}^2/_3$, $5\,{}^1/_4$, $7\,{}^2/_5$ et 10 les nombres donnés. On réduit toutes les fractions au même dénominateur

$$2\frac{40}{60},\qquad 5\frac{15}{60},\qquad 7\frac{24}{60} \text{ et } 10.$$

Puis on réduit tous ces nombres en expressions fractionnaires;

$$\frac{160}{60},\qquad \frac{315}{60},\qquad \frac{444}{60},\qquad \frac{600}{60}.$$

Il faut partager le trapèze ABDC en parties proportionnelles aux numérateurs 160, 315, 444 et 600. En effet, si nous appelons s la 60e partie du trapèze partiel ABEF,

$$ABEF = 160s;\quad FEGH = 315s;\quad HGIK = 444s;\quad IKDC = 600s.$$

41. Problème. *Partager un trapèze en plusieurs parties de grandeurs données par des parallèles à ses bases.*

Par ex. : en parties égales à $20^{ares},48$; $19^a,58$; $32^a,27$.

Le trapèze donné a pour superficie

$$29^a,18 + 19^a,58 + 32^a,27 = 81^a,23.$$

Le problème revient évidemment à partager ce trapèze en parties proportionnelles aux nombres 29,48; 19,58; 32,27, ou bien à 2948, 1958, 3227; ce que nous avons appris à faire (n° 39).

42. Problème. *Détacher d'un trapèze donné une partie de grandeur donnée par une parallèle à ses bases.*

Par ex. : une partie égale à $27^{ares},84$.

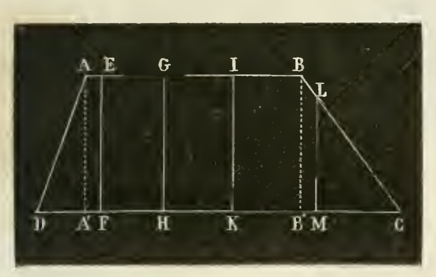
On mesure la surface du trapèze donné ; supposons-la égale à $64^a,80$, on retranche de cette aire les $27^a,84$, il reste $36^a,96$. Le trapèze doit être divisé en deux parties égales à $27^a,84$ et $36^a,96$, c'est-à-dire en parties proportionnelles à 27,84 et 36,96 ; ce que nous savons faire (n° 41 ou n° 39).

On suit la même marche pour séparer dans un triangle donné une portion donnée par une parallèle à sa base.

En général, *pour séparer d'un trapèze ou d'un triangle donné plusieurs parties de grandeurs données*, on additionne ces aires partielles, et on les retranche de l'aire de la figure donnée préalablement mesurée ; le reste est une dernière partie. On partage la figure donnée en parties égales aux aires données et à ce reste.

43. Problème. *Diviser un trapèze en parties de grandeurs données par des perpendiculaires à ses bases.*

Par exemple, en cinq parties égales à $25^{ares},80$, $28^a,40$, $32^a,54$, $26^a,46$ et $17^a,42$. Le trapèze est la somme de ces parties, $130^a,62$.



On abaisse la perpendiculaire AA', et on mesure le triangle $ADA' = \frac{1}{2} DA' \times AA'$. Supposons-le égal à $20^a,48$; il faut $5^a,32$ pour compléter la 1re partie.

Ayant mesuré AA', on calcule une longueur x telle que $AA' \times x = 532$ (*). On porte cette longueur x trouvée sur A'C ; soit $x = A'F$; on élève la perpendiculaire FE. Le quadrilatère ADFE est la 1re partie ; il vaut $20^a,48 + 5^a,32 = 25^a,80$. On connaît $EF = AA'$, on calcule une longueur y telle que $EF \times y = 2840$; on porte la longueur trouvée sur FC. Soit $FH = y$; on élève la perpendiculaire HG ; le rectangle $EFGH = EF \times FH = EF \times y =$

(*) Nous écrivons 532 sans virgule, parce que x est un nombre de mètres et que $5^{ares},32 = 532^{\text{mètres carrés}}$. Cette remarque est importante ; elle s'applique à tous les cas analogues.

$28^a,40$; c'est la 2e partie. On détermine de même la 3e partie GHKI; on calcule une longueur z telle que $GH \times z = 3254$ ($GH = AA'$); on porte z sur HC; $z = HK$, et on élève la perpendiculaire KI. On opère de même pour déterminer la 4e partie; on calcule t telle que $IK \times t = 2646$; supposons que t surpasse IBKB'. On évalue le produit $IK \times KB'$; supposons-le égal à 2420; le rectangle $IKB'B = 24^a,20$; il manque $2^a,26$. On mesure le triangle

$BCB' = \frac{1}{2} B'B \times BB'$, et on le divise en deux parties égales à $2^a,26$

et $17^a,42$ par une parallèle LM, à sa base BB'; IKML est la 4e partie du trapèze, et LMC la 5e partie.

Remarque. Le premier triangle mesuré peut se trouver plus grand que la première portion à faire; c'est, par exemple ce qui arriverait dans notre exemple si l'on commençait la division du terrain par la droite. Le triangle CBB' étant plus grand que la 1re partie $17^a,42$, on retranche $17^a,42$ de l'aire du triangle; il reste $2^a,26$. On divise le triangle en deux parties égales à $17^a,42$ et $2^a,26$ (n° 11). Cette division opérée, on complète la 2e partie qui doit être de $26^a,46$, en ajoutant à $BB'LM = 2^a,26$ le complément $24^a,20$; on calcule une longueur t telle que $BB' \times t = 2420$; etc.

44. Problème. *Diviser un trapèze en parties égales par des perpendiculaires à ses bases.*

Par exemple, en cinq parties égales.

On mesure l'aire du trapèze $= \frac{AB + DC}{2} \times AA'$; supposons-la égale à $124^a,80$. On divise cette aire par 5; le quotient est $24^a,96$. On sépare successivement 5 aires égales à $24^a,96$ en suivant la même marche que dans le cas précédent.

45. Problème. *Diviser un trapèze en parties proportionnelles à des nombres donnés par des perpendiculaires à ses bases.*

Par exemple aux nombres 3, 5, 7, 11 et 14.

On mesure l'aire du trapèze. Supposons-la égale $328^{ares},40$. On partage cette aire par le calcul en parties proportionnelles à 3, 5, 7, 11 et 14. Puis on divise le trapèze en parties égales aux aires calculées par des perpendiculaires à ses bases (n° 43),

$$3 + 5 + 7 + 11 + 14 = 40; \quad 328^a,40 : 40 = 8^a,21.$$

La 1re partie $= 8^a,21 \times 3 = 24^a,53$; la 2e, $8^a,21 \times 5 = 41^a,05$, etc.

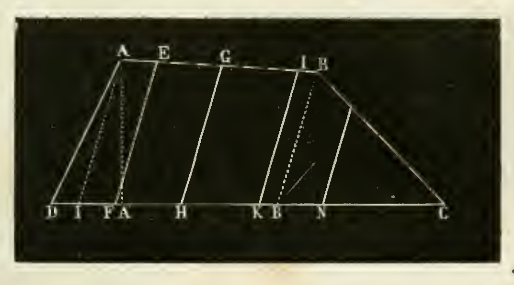
On divise le trapèze en parties égales à $24^a,63$; $41^a,05$, etc. (n° 43).

46. Si les nombres donnés étaient fractionnaires, ou s'il y avait parmi eux des nombres fractionnaires, on réduirait tous les nombres donnés sans exception en expressions fractionnaires de même dénominateur, puis on partagerait le trapèze en parties proportionnelles aux numérateurs.

47. Problème. *Diviser un trapèze en parties de grandeurs données par des obliques à ses bases ayant une direction donnée, ou parallèles à une ligne donnée.*

Par exemple en 5 parties égales à $25^a,80$; $28^a,40$, etc., comme au n° 43.

On mène par l'un des sommets A ou D une ligne AI (intérieure



au trapèze) ayant la direction donnée, ou parallèle à la ligne donnée, et on abaisse la perpendiculaire AA′. On mesure l'aire du triangle $ADI = \frac{1}{2} DI \times AA'$. Supposons cette ère égale à $10^a,25$, on soustrait cette aire de $25^a,80$, il reste $15^a,55$; on calcule une longueur x telle que $AA' \times x = 1555$. On porte cette longueur x trouvée sur IC, soit $x = IF$, et on mène FE parallèle à AI. Le parallélogramme $AEFI = AA' \times IF = 15^a,55$, et le quadrilatère $ADFE = 10^a,25 + 15^a,55 = 25^a,80$. On détermine les autres parties de la même manière qu'au n° 43, seulement au lieu de perpendiculaires, on mène par les points H, K, etc., des parallèles à AI.

Même remarque qu'au n° 43 pour le cas où le triangle ADI serait plus grand que la 1re partie. Voyez d'ailleurs le triangle BB′C.

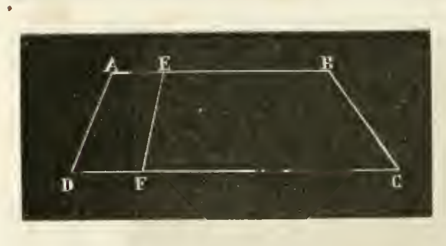
48. PROBLÈME. *Diviser un trapèze en parties égales par des obliques à ses bases ayant une direction donnée ou parallèles à une ligne donnée.*

On suivra la même marche qu'au n° 44; seulement au lieu de perpendiculaires, on mènera des obliques parallèles à la direction donnée.

49. PROBLÈME. *Diviser un trapèze en parties proportionnelles à des nombres donnés par des obliques à ses bases ayant une direction donnée.*

On suit la même marche qu'au n° 45; la seule différence consiste en ce qu'on mène des lignes parallèles à la direction donnée au lieu de perpendiculaires.

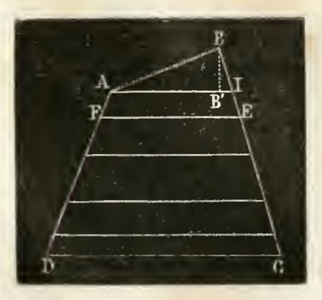
REMARQUE. Notre méthode est tout à fait générale; on peut même donner aux lignes de partage des directions différentes.



En effet, si la 1re ayant la direction EF, la 2e devait avoir une direction différente, on n'aurait qu'à diviser le trapèze restant EFCB en parties de grandeurs données par des lignes ayant une direction donnée. Si la troisième ligne de partage avait une nouvelle direction donnée, ce ne serait pas plus difficile.

50. PROBLÈME. *Diviser un quadrilatère* ABCD *en parties de grandeurs données par des parallèles à un de ses côtés*, DC.

Par exemple, en parties égales à 25ares,80; 28a,40, etc., comme au n° 43. On mène par le point A ou par le point B une parallèle à DC (intérieure au quadrilatère). On mesure le triangle $ABI = \frac{1}{2} AI \times BB'$; supposons-le égal à 8a,45. On retranche cette aire de 25a,80; il reste 17a,35. On partage le trapèze AICD cinq parties égales à 17a,35; 28a,40; 32a,54, etc., par des parallèles à ses



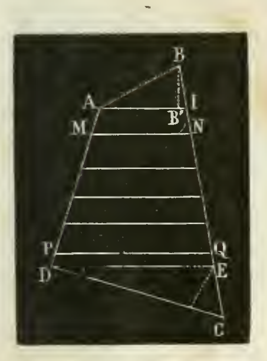
bases AI, DC, comme il a été expliqué n° 41. La première ligne de division du trapèze étant EF, la première partie du quadrilatère égale à $25^a,80$ est ABFE.

Si le triangle ABI surpassait la première part, par ex. : ABI = $34^a,48$; on en détache une partie égale à $25^a,80$ par une parallèle à sa base comme il a été expliqué n° 42; soit MN la ligne de division (faites la figure). Le trapèze MNAI $= 8^a,68$; on retranche cette aire de la deuxième partie indiquée $28^a,40$; il reste $19^a,72$. On partage le trapèze AICD en quatre parties égales à $19^a,72$; $32^a,56$; $26^a,46$; et $17^a,42$.

Si le triangle ABI équivalait à plusieurs des parties indiquées, ce qui se voit facilement, on en détacherait ces diverses parties par des parallèles à ses bases. Il y aurait généralement un reste que l'on retrancherait de la première des parties non comprises dans ce triangle ABI. On achèverait en divisant le trapèze AICD en parties égales au résultat de cette soustraction et aux autres parties restantes par des parallèles à ses bases.

51. Problème. *Diviser un quadrilatère quelconque en parties de grandeurs données par des lignes ayant une direction donnée.*

Par exemple, en parties égales à $25^a,80$; $28^a,40$, etc.; comme au n° 43. Par le point A ou par le point B on mène une parallèle AI à la direction donnée (dans le quadrilatère). Cette parallèle détermine un triangle ABI que l'on mesure; supposons-le égal à $8^a,45$. On retranche cette aire de $25^a,80$; il reste $16^a,35$. Il faut diviser le quadrilatère AICD en cinq parties égales à $16^a,35$; $28^a,40$; 32,54, etc.; par des parallèles à un de ses côtés AI, ce qui est le problème précédent. Pour cela, ayant mené la droite DE parallèle à AI, on mesure l'aire du triangle DEC; supposons-la égale à $12^a,36$; on retranche cette aire de la cinquième part à faire, $17^a,42$; il reste $5^a,06$. Il reste à partager le trapèze AIED en cinq parties égales à $16^a 35$; $28^a,40$;..., et $5^a,06$ par des parallèles à ses bases (n° 41). Si la première ligne de division supérieure du trapèze est MN et la dernière inférieure PQ, la première partie du quadrilatère est ABNM, et la dernière DCQP.



Si le triangle ABI surpassait la première partie indiquée, ou le triangle DEC la dernière, on opérerait d'une manière analogue à ce qui a été expliqué pour le même cas du problème précédent.

52. Problème. *Diviser un quadrilatère en un certain nombre de parties équivalentes par des lignes parallèles à un de ses côtés, ou bien par des lignes ayant une direction donnée.*

En cinq parties équivalentes, par exemple :

On mesure le quadrilatère; supposons-le égal à $324^a,50$. On divise cette aire par 5; le quotient est $64^a,90$. On partage le quadrilatère en cinq parties toutes égales à $64^a,90$ comme il vient d'être expliqué dans l'un ou l'autre des numéros précédents.

53. Problème. *Diviser un quadrilatère en parties proportionnelles à des nombres donnés par des parallèles à un de ses côtés, ou bien par des lignes ayant une direction donnée.*

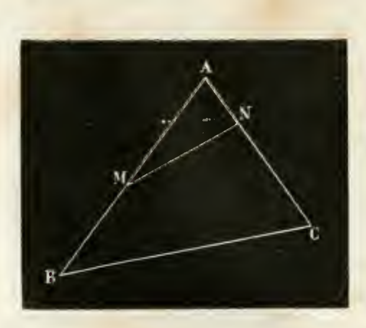
Par ex. : en parties proportionnelles aux nombres 3, 5, 7, 11 et 14. On mesure le quadrilatère; supposons-le égal à $328^{ares}, 40$. On partage cette aire par le calcul en parties proportionnelles aux nombres 3, 5, 7, 11 et 14 (Arithmétique).

La 1re partie est $24^a,63$; la 2e $41^a,05$, etc.

On partage le quadrilatère en cinq parties égales à $24^a,63$; $41^a,05$, etc., suivant les autres conditions données.

54. Problème. *Diviser un triangle en parties de grandeurs données par des droites ayant une direction donnée.*

On mesure ce triangle; puis on le traverse par une droite MN ayant la direction donnée. On mesure le triangle obtenu AMN. S'il contient une ou plusieurs des portions données qui doivent être prises dans cette partie du triangle, on en détache ces portions par des parallèles à sa base MN, comme il a été expliqué nos 42 et 44. Il y a généralement un reste; on le retranche de la première des portions qui restent à former. Puis on partage le quadrilatère MNCB par des parallèles à son côté MN en parties égales au résultat de cette soustrac-



tion et aux autres portions données que l'on n'a pas encore considérées.

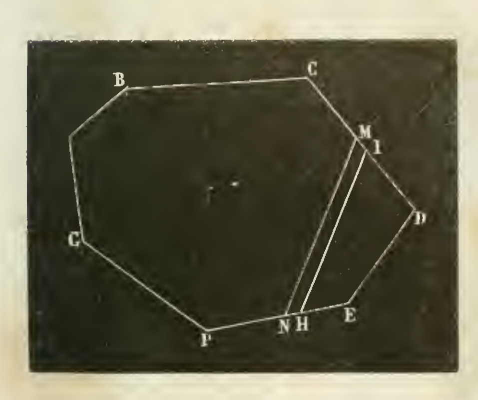
Si l'aire AMN était inférieure à la première des portions à former dans cette partie du triangle ABC, on retrancherait AMN de cette première portion. Puis on diviserait le quadrilatère MNBC par des parallèles à MN en parties égales au reste de cette soustraction et aux autres portions données.

55. Problème. *Détacher d'un triangle ou d'un quadrilatère des portions de grandeurs données par des lignes ayant une direction donnée.*

On mesure le triangle ou le quadrilatère donné. On retranche de l'aire trouvée la somme des portions données. Le problème revient évidemment à diviser le triangle ou le quadrilatère en parties égales aux portions données et au reste de la soustraction.

56. Problème. *Diviser un polygone quelconque en parties de grandeurs données par des lignes ayant une direction donnée.*

On traverse le polygone par une ligne MN ayant la direction donnée, de manière à en détacher *un triangle ou un quadrilatère*, que l'on mesure. Si l'aire trouvée contient une ou plusieurs des portions qui doivent être formées dans cet endroit du polygone; on sépare ces portions par des lignes ayant la direction donnée, comme il vient d'être expliqué dans les numéros précédents. Ces portions détachées, il reste, en général, une certaine partie du triangle ou du quadrilatère; ce reste IMNH s'ajoute à la seconde partie du polygone donné; le tout forme un polygone ABCIHPG dans lequel on doit faire les autres portions données. On doit évidemment continuer en opérant de la même manière, c'est-à-dire qu'on mène une nouvelle parallèle à IH qui sépare du polygone ABCIHPG un *triangle*



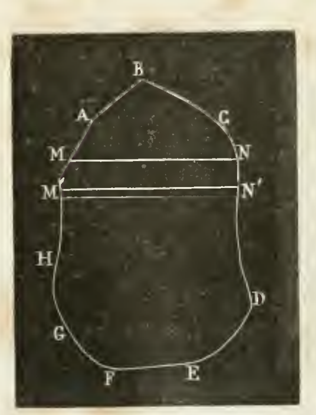
ou un trapèze que l'on mesure. On sépare dans ce triangle ou dans ce quadrilatère, par des parallèles à sa base ou à ses bases, les portions données suivantes qu'il peut contenir. Cela fait, il reste en général un polygone dans lequel il faut former les portions qui restent encore à faire.

Si le triangle ou le quadrilatère détaché soit du premier polygone, soit d'un autre, était moindre que la première des portions à former dans cet endroit, on retrancherait son aire de cette première portion. Puis on partagerait le polygone restant après ce triangle ou ce quadrilatère en parties égales au reste et aux portions non encore formées.

Le problème de la division d'un polygone en parties de grandeurs données, par des lignes ayant une direction donnée, est donc résolu de la manière la plus générale.

57. Problème. *Diviser un terrain dont le contour est irrégulier, en parties de grandeurs données par une ligne ou par des lignes ayant une direction donnée.*

On emploie pour cela la même méthode de tâtonnement qu'au n° 18 de la 1re partie. On trace une ligne MN ayant la direction donnée qui détache une surface MABCN à peu près égale à vue d'œil à la première des portions qui doivent être formées de ce côté du terrain. On mesure cette aire partielle MABCN comme il a été expliqué dans l'arpentage. Si elle est trop petite, on trace une parallèle M'N' qui sépare au delà de MN une aire MNN'M' qui complète à peu près la première portion. Si cette aire additionnelle était encore un peu trop petite, on tracerait encore une nouvelle parallèle, etc. Si la surface séparée MABCN était trop grande, on la diminuerait de la même manière, en traçant successivement plusieurs parallèles à MN. Supposons que M'ABCN' soit la première portion demandée. Il reste à séparer dans M'N'DEFGH les autres portions indiquées; on opérera de la même manière.



58. Observation générale. Sachant diviser une figure en parties de grandeurs données, on sait la partager en un nombre *quelconque de parties égales*, ou bien en *parties proportionnelles* à des nombres donnés; on sait aussi la diviser suivant des conditions quelconques indiquées concernant les grandeurs des portions à faire. On mesure la surface du terrain (arpentage). On divise *par le calcul* (arithmétique ou algèbre) l'aire trouvée suivant les conditions indiquées. Puis on divise le terrain en parties égales aux aires ainsi calculées.

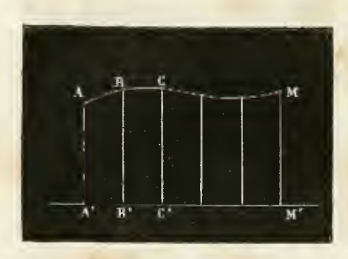
59. *Les lignes de partage peuvent avoir des directions diverses.*

Le problème n'en est pas plus difficile. On détache une première portion par une ligne ayant la première direction donnée. Cela fait, il reste un terrain duquel on détache une deuxième portion par une autre ligne ayant la seconde direction donnée. Ainsi de suite.

Tous les problèmes que nous avons expliqués dans cet appendice peuvent être résolus sur le plan du terrain dressé à l'avance. Le partage effectué sur le plan, il n'y a plus qu'à tracer sur le terrain, d'après le plan, les lignes qui doivent séparer les diverses portions.

NIVELLEMENT.

1. Le plan géométral d'un terrain est sa projection horizontale réduite à une échelle connue. Cette projection ne suffit pas à faire connaître la forme du terrain quand celui-ci est accidenté ou simplement incliné à l'horizon (V. la fig. 1, page 1); il faut encore connaître les hauteurs au-dessus du plan de projection d'un certain nombre de points du terrain A, B, C,... convenablement choisis et suffisamment rapprochés. Ces hauteurs AA′, BB′, CC′,... et les projections A′, B′, C′,... déterminent complétement les positions relatives des points A, B, C,... et par suite la forme exacte de chaque ligne du terrain avec ses pentes et ses ondulations. (V. la fig. de la page 1 et la fig. ci-contre.)



2. Le plan de projection (sur lequel est supposé construit le plan géométral) est un plan horizontal quelconque, tout à fait arbitraire. On précise ordinairement sa position en donnant sa distance à un des points du terrain; on le suppose par exemple à 60 mètres au-dessous du point A (n° 18), puis on fait le nivellement du terrain (*).

(*) Les nivellements se font ordinairement à propos de l'écoulement et de la conduite des eaux, pour la construction des routes et des chemins de fer. Pour ces divers objets, ce ne sont pas précisément les hauteurs différentes des points du sol au-dessus d'un même plan horizontal qu'il importe de considérer, ce sont leurs distances à la même surface de niveau (V. à la fin de ce cours).

Mais les différences de niveau sont sensiblement égales aux différences de hauteur quand on opère dans certaines conditions que nous avons soin de prescrire; on peut prendre les unes pour les autres sans erreur sensible. C'est pourquoi nous ne parlons dans ces leçons que des différences de hauteur que nous pouvons seules déterminer directement. Les différences de niveau se déduisent d'ailleurs aisément des différences de hauteur quand il y a nécessité de le faire. V. pour cela la note placée à la fin du cours sous ce titre (*Surfaces de niveau; niveau vrai, niveau apparent.*)

3. *Faire le nivellement d'un terrain*, c'est déterminer *les différences de hauteur* d'un certain nombre de ses points considérés deux à deux au-dessus d'un même plan horizontal qu'on appelle *plan de comparaison*. Avec ces différences et la hauteur donnée AA′ de l'un de ces points au-dessus de ce plan, on calcule les hauteurs BB′, CC′,...., des autres points B, C, D,... Par exemple, si la hauteur donnée AA′=60 mètres et la différence BB′—AA′=3 mètres, il est clair que B est plus élevé que A de 3 mètres, et que la hauteur BB′ de B est 63 mètres.

Les valeurs numériques de AA′, BB′, CC′, s'appellent les *cotes de hauteur* des points A, B, C.

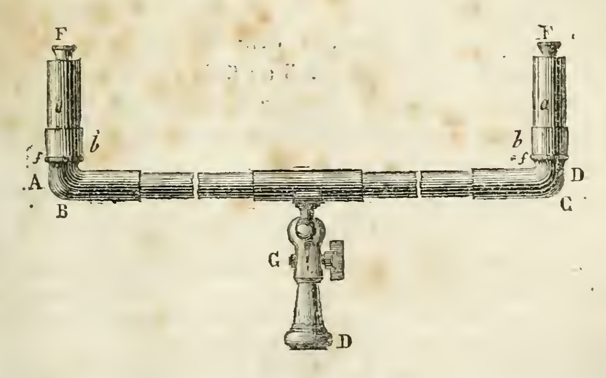
4· On se sert pour les nivellements de deux instruments spéciaux, le *niveau* et la *mire*.

Un *niveau* sert à indiquer une direction horizontale ou à diriger des rayons visuels à partir du même point dans un même plan horizontal qu'on appelle *plan de niveau*. La mire sert à mesurer la distance de chaque point considéré du terrain à ce plan de niveau.

5. Il y a plusieurs espèces de niveaux; nous ne décrirons *pour le moment* que le plus vulgaire qui est le niveau d'eau.

Tout ce que nous ferons avec le niveau d'eau se fait avec les autres niveaux qui servent tous au même objet indiqué plus haut (n° 4). Il n'y a de différence que pour la portée de l'instrument, c'est-à-dire la distance la plus grande à laquelle on peut convenablement viser.

Niveau d'eau. Ce niveau consiste en un long tube de fer-blanc



redressé en coude et à angle droit à chacune de ses extrémités.

Les deux bouts recourbés, très-courts, sont continués par deux fioles en verre, sans fond, à goulots étroits et à peu près de même diamètre, dont le contact parfait avec le tube est établi par des rondelles de cuivre ou par du mastic. Le tout est rempli d'eau, ordinairement colorée avec quelques gouttes de vin, jusqu'à la moitié ou aux deux tiers environ de la hauteur des deux fioles. Le tube de fer-blanc est supporté en son milieu, et maintenu dans une position à peu près horizontale par une douille conique qui s'applique soit directement, soit par l'intermédiaire d'un genou (V. la fig.), à la tige verticale d'un pied à trois branches semblable à celui qui supporte le graphomètre ou la boussole (*Levé*, n° 19).

6. Le plan horizontal déterminé par les surfaces libres du liquide dans les deux fioles doit rester le même quand le niveau tourne autour du point de station (*). On reconnaît que cette condition est remplie en faisant faire au niveau un tour d'horizon; la hauteur de l'eau doit rester à peu près la même dans les deux fioles. Si cette hauteur varie sensiblement, c'est que le tube de fer-blanc n'est pas suffisamment horizontal; on desserre la vis du genou à coquilles et on redresse le tube.

7. Les cercles qui limitent supérieurement les surfaces libres du liquide des deux fioles étant dans le même plan horizontal, les rayons visuels de directions quelconques tangeants à ces cercles sont tous dans ce plan horizontal qu'on appelle *plan de niveau*.

L'eau mouillant les deux fioles, sa surface libre n'est pas tout à fait plane; elle forme des ménisques concaves; mais les cercles qui limitent ces deux ménisques sont dans un même plan horizontal. Lorsqu'on opère, on s'éloigne à 5 ou 6 décimètres du niveau; de là on voit les deux cercles se dessiner nettement sur les deux fioles. C'est pour les rendre plus visibles qu'on colore légèrement l'eau avec quelques gouttes de vin.

Nous indiquons plus loin l'usage du niveau (n° 11) (**).

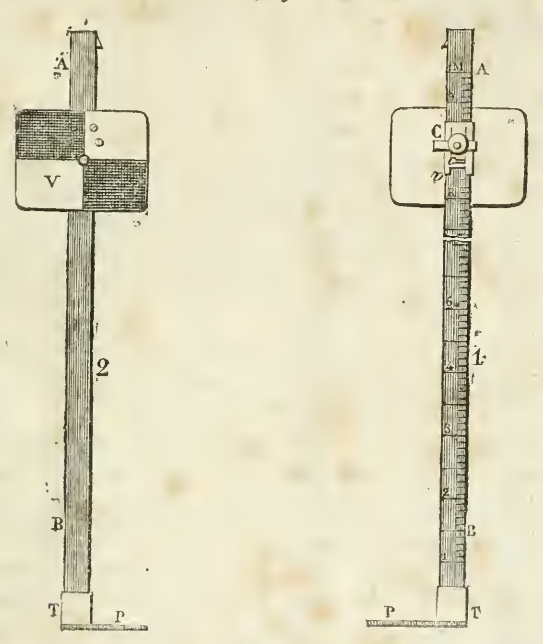
(*) Pour la réalisation de cette condition essentielle, il importe que les deux fioles aient le même diamètre.

(**) Voici pour compléter ces notions l'indication de *quelques autres précautions destinées à rendre plus sûr l'usage du niveau d'eau.*

Un niveau d'eau se compose en général de plusieurs parties; les fioles se montent à vis ainsi que les trois parties du tube principal. Il importe beau-

8. De la mire. Il y a des mires *simples* et des mires *à coulisse*.

Mire simple. La mire simple est une règle divisée en bois, longue de deux mètres environ, que l'on maintient verticalement



sur le sol pour mesurer la distance du point où on est à un plan de niveau (nº 7).

---

coup que ces divers assemblages ne laissent pas perdre l'eau ; autrement, le plan de niveau baisserait continuellement.

Il faut avoir soin de faire sortir les bulles d'air qui restent engagées dans l'eau du tube inférieur, et attendre après l'avoir fait que le liquide soit revenu à son état d'équilibre.

En hiver, on se sert d'eau alcoolisée pour éviter la congélation.

Il faudrait dans les longues stations avoir égard à l'évaporation de l'eau par un grand soleil ou à son augmentation en cas de pluie abondante. Pour remédier à ces inconvénients, on donne aux fioles des orifices étroits qu'il est facile de boucher et qu'on munit de couvercles métalliques qui les protégent d'ailleurs dans les transports.

Toutes les visées d'une même station doivent être faites par la même personne, deux observateurs prenant rarement les mêmes points des onglets pour déterminer leurs lignes de visée.

Cette règle a la forme d'un long prisme à base carrée, terminé inférieurement par un talon en fer T; à ce talon est adaptée une semelle ou pédale P, sur laquelle on appuie le pied pour maintenir la mire verticale. La face postérieure de la mire (*fig.* 1) est divisée en décimètres et en centimètres, sur une longueur de deux mètres à partir de l'extrémité inférieure du talon. (Les décimètres sont seuls indiqués par des chiffres.) Une plaque rectangulaire de bois ou de métal V, nommée *voyant*, attachée à un collier C de même métal qui embrasse la règle, peut monter ou descendre en avant de celle-ci (*fig.* 2). Cette plaque est divisée en quatre rectangles égaux par une horizontale et une verticale; deux de ces rectangles, opposés diagonalement, sont peints en blanc; les deux autres en noir ou en rouge. L'horizontale du milieu s'appelle *ligne de foi*.

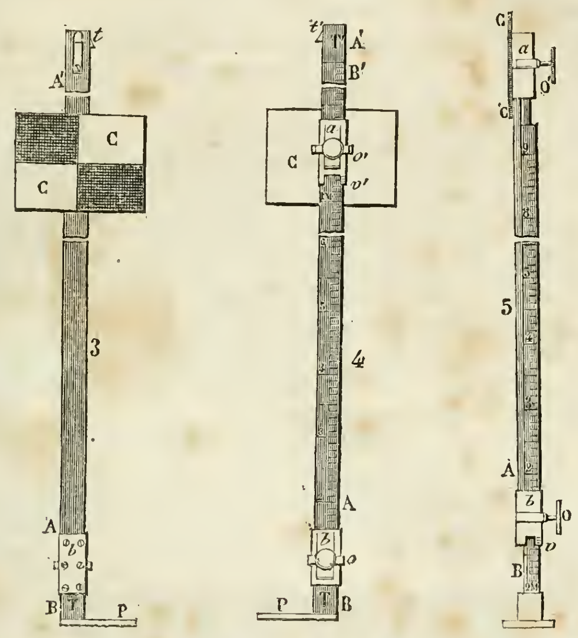
Les mires qui servent avec le niveau d'eau ont également leur voyant simplement divisé en deux parties, l'une noire, l'autre blanche, par une horizontale (*la ligne de foi*).

Le voyant peut être fixé à la hauteur que l'on veut au moyen d'une vis de pression *c*. La face postérieure du collier est échancrée (*fig.* 1) de manière à laisser voir les traits de division de la règle jusqu'à un trait de repère marqué sur un des côtés de cette échancrure, à la hauteur de la ligne de foi dont il masque le niveau sur la règle divisée. A partir de ce trait de repère et au-dessous, dix autres traits plus petits gravés sur le même côté de l'échancrure indiquent des millimètres.

9. Pour mesurer une hauteur avec la mire quand le voyant est fixé, on lit sur la règle la hauteur indiquée par le trait immédiatement inférieur au trait de repère de l'échancrure, et on ajoute à cette hauteur autant de millimètres qu'il y en a sur le collier entre ces deux traits.

10. Mire a coulisse. Cette mire, qui sert à mesurer les hauteurs de 0 à 2 mètres, et de 2 mètres à 4 mètres, se compose de deux règles en bois ayant chacune un peu plus de deux mètres de long. Une rainure à coulisse est creusée sur une face de l'une B; une languette à rebords fait saillie sur une face de l'autre A. La languette s'engageant dans la rainure, on peut faire monter ou descendre la seconde règle devant la première à l'aide d'un collier *b*

(*fig.* 5), attaché au bas de la règle mobile et embrassant les deux règles. La règle fixe est terminée inférieurement par un talon en fer T, qui fait saillie sous la règle mobile; ce talon est muni d'une pédale P. La règle mobile est terminée supérieurement par



un talon en bois T′, qui fait saillie au-dessus de la règle fixe. Deux faces de celle-ci sont divisées en décimètres et en centimètres: 1° La face postérieure large (*fig.* 4) dont le zéro est à l'extrémité inférieure du talon T; 2° une face latérale étroite (*fig.* 5) dont le zéro est un peu au-dessus du même talon. Il y a aussi un voyant C (*fig.* 3), dont le collier peut embrasser les deux règles; la face postérieure de ce collier *a* est échancrée et divisée comme celle du voyant de la mire simple (*fig.* 4). La face latérale du collier *b* qui glisse sur la face étroite divisée de la règle est de même échancrée et divisée en millimètres (*fig.* 5).

Mesure des hauteurs qui ne dépassent pas deux mètres. On fait descendre le collier *b* le plus possible, jusqu'à ce que l'extrémité libre de chaque règle bute sur le talon de l'autre, puis on serre la

vis du collier. Le système des deux règles, serrées l'une contre l'autre, constitue alors une mire simple à base carrée, tout à fait semblable à celle que nous avons décrite, et dont on se sert comme il a été dit n° 9 *bis*. La hauteur de la ligne de foi se lit sur la face postérieure de la règle fixe (*fig.* 4).

Mesure des hauteurs qui surpassent deux mètres. On fait monter le voyant jusqu'à ce qu'il vienne buter contre un taquet à ressort t', placé sur le talon T', et on serre la vis de son collier a (*fig.* 4). Le voyant est alors tout à fait indépendant de la règle fixe, et fait corps avec la règle mobile avec laquelle il va monter. On desserre le collier b, et on le fait monter jusqu'à ce que le voyant soit suffisamment élevé. On fixe alors ce collier b (*fig.* 5), et on lit sur la face latérale étroite de la règle fixe la hauteur à laquelle est parvenu son trait de repère. En ajoutant deux mètres, on a la hauteur de la ligne de foi du voyant au-dessus du sol.

11. Usage du niveau et de la mire. Le nivellement d'un terrain se fait en répétant un certain nombre de fois l'opération fondamentale que nous allons expliquer :

DONNER UN COUP DE NIVEAU SUR UN POINT A DU TERRAIN.

Le niveau étant placé à une certaine distance du point A (à 25 mètres au plus), on dirige la branche horizontale vers une mire qu'un aide maintient verticale au-dessus de ce point, le voyant tourné vers le niveleur (V. la figure suivante). Celui-ci, placé à environ 60 centimètres en arrière du niveau, dirige vers la mire un rayon visuel tangent *intérieurement* aux cercles qui limitent les surfaces libres de l'eau. Il fait signe à l'aide avec la main d'abaisser ou d'élever le voyant jusqu'à ce que la ligne de foi ne soit ni au-dessus, ni au-dessous du rayon visuel, mais soit précisément rencontrée par ce rayon visuel (*). Quand il en est ainsi, sur un dernier

(*) Quand la ligne de foi approche de la position cherchée, les gestes du niveleur sont plus lents, afin que l'aide fasse mouvoir le voyant plus lentement pour plus de précision. Le niveleur ne fait signe à l'aide de fixer le voyant qu'après s'être assuré, en faisant tourner légèrement le tube, que le rayon visuel parcourt bien la ligne de foi. La vis une fois serrée, on vise encore pour s'assurer qu'elle a été serrée bien à point.

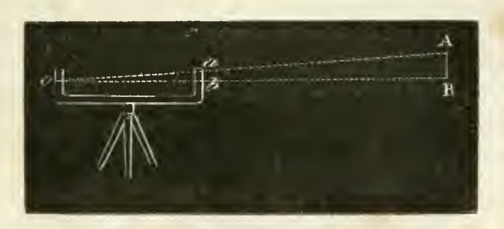
signe du niveleur, l'aide fixe le voyant en serrant la vis de pression. Il porte alors la mire au niveleur qui inscrit sur son carnet la hauteur de la ligne de foi indiquée sur la règle divisée.

En faisant simplement tourner la branche horizontale du niveau autour de la verticale du point de station, on détermine de la même manière les distances d'autant de points B, C,..., que l'on veut au même plan de niveau.

12. REMARQUE. Avec le niveau d'eau on ne peut guère viser avec précision qu'à des distances au plus égales à 25 mètres, et par suite effectuer un nivellement simple (n° 14) qu'entre deux points A et B distants au plus de 50 mètres (*). Quand on veut opérer à de plus grandes distances (dans les grands nivellements), on emploie le niveau à bulle d'air et à lunette avec lequel on peut viser sans crainte d'erreur à 75 mètres et même à 100 mètres de distance, et faire des nivellements simples entre des points distants de 150 à 200 mètres. Nous décrirons le niveau à bulle d'air dans notre *Complément*.

13. Abordons maintenant la question générale du nivellement :

(*) Quelque soin que l'on mette à bien viser tangentiellement aux circonférences supérieures des deux onglets, la ligne de visée n'est jamais parfaitement horizontale. Soient l la longueur du tube, h et H les distances ab, AB de la ligne



de visée à l'horizontale oB issue du même point, mesurées sur la 2e fiole et sur la mire placée à la distance oB = L; les triangles semblables donnent

$$\frac{L}{l} = \frac{H}{h}; \quad \text{d'où} \quad H = \frac{L \times h}{l}.$$

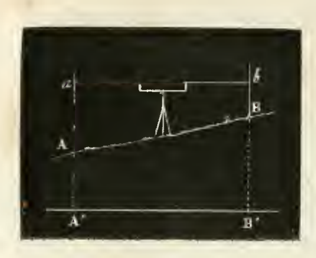
La longueur l du niveau est ordinairement 1m,25; si l'on admet qu'à cette distance la déviation h de la ligne de visée est déjà de 0m,005, on trouve par la formule qu'à une distance L de 25 mètres l'écart H est déjà 0m,01. C'est pour ne pas s'exposer à une trop grande erreur sur la mesure des hauteurs qu'on ne vise pas généralement à plus de 25 mètres avec le niveau d'eau.

DÉTERMINER LA DIFFÉRENCE DES HAUTEURS DE DEUX POINTS DU TERRAIN AU-DESSUS DU MÊME PLAN HORIZONTAL.

Ce problème se résout par un nivellement simple ou par un nivellement composé; cela dépend de la distance des points considérés et des accidents du terrain.

14. NIVELLEMENT SIMPLE. Un nivellement simple est celui qui se fait sans changer de station.

Pour trouver par un nivellement simple la différence de hauteur de deux points A et B, on met le niveau en station en un point situé autant que possible à égale distance de ces points, et choisi de telle manière que le plan de niveau soit supérieur à tous deux. L'aide se transporte successivement avec la mire au point A et au point B. On donne un coup de niveau sur A, un autre sur B (n° 11) : soient a et b les hauteurs Aa, Bb, lues sur la mire. Si a surpasse b, c'est que le point B est plus élevé que A au-dessus d'un plan horizontal inférieur quelconque, et la différence de leurs hauteurs est $a-b$. Si au contraire b surpasse a, c'est que le point A est le plus élevé, et la différence des hauteurs est $b-a$.



DÉMONSTRATION. Désignons par A et B les cotes de hauteur AA', BB', des points A et B, c'est-à-dire leurs hauteurs au-dessus du plan de comparaison A'B'; nous avons déjà appelé a et b leurs distances Aa, Bb au plan de niveau (lues sur la mire). La figure montre que $A+a=B+b$ (le plan de comparaison et le plan de niveau étant partout également distants).

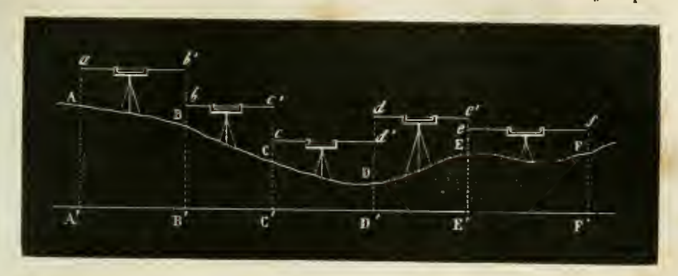
De l'égalité $$A+a=B+b$$
on déduit $$B-A=a-b, \text{ ou } A-B=b-a,$$

suivant que la hauteur de mire a est plus grande ou plus petite que b. Notre proposition est donc démontrée.

15. NIVELLEMENT COMPOSÉ. Le nivellement est composé quand la distance ou la disposition des lieux oblige à faire plusieurs nivellements simples pour trouver la différence des hauteurs de deux points A et F.

On choisit des points intermédiaires B, C, D, E, tels qu'on puisse

faire sans grande difficulté et avec une exactitude suffisante un nivellement simple entre A et B, un autre entre B et C, etc., jusqu'à F.



Dans ces nivellements qu'on effectue successivement, on donne sur chaque point intermédiaire deux coups de niveau que l'on distingue ainsi : On appelle *coups avant* les coups de niveau dirigés dans le sens de la marche (que nous supposerons avoir lieu de A vers F). On appelle *coups arrière* les coups donnés dans le sens contraire (sens FA). Par abréviation on appelle aussi coups *arrière* ou coups *avant* les hauteurs lues sur la mire dans les coups de niveau arrière ou avant. Nous désignerons dans nos égalités les coups *arrière* par des lettres non accentuées a, b, c, d, e, et les coups *avant* par des lettres accentuées b', c', d', e', f'.

$$(\mathrm{A}a = a,\ \mathrm{B}b = b,\ \text{etc. } \mathrm{B}b' = b',\ \mathrm{C}c' = c',\ \text{etc.})$$

Enfin nous désignerons par A, B, C,...F les cotes de hauteurs des points A, B, C,... c'est-à-dire leurs hauteurs AA', BB', CC',... au-dessus du plan de comparaison choisi.

Cela posé, en considérant les nivellements simples un à un, et par ordre, on établit aisément, à l'inspection de la figure (comme au n° 14, *Dém*[on]), les égalités suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} a + \mathrm{A} = b' + \mathrm{B} & (1) \\ b + \mathrm{B} = c' + \mathrm{C} & (2) \\ c + \mathrm{C} = d' + \mathrm{D} & (3) \\ d + \mathrm{D} = e' + \mathrm{E} & (4) \\ e + \mathrm{E} = f' + \mathrm{F} & (5). \end{array}\right\} (m).$$

Ces égalités ne déterminent pas les cotes de hauteurs A, B, C,... (parce qu'il y a 6 cotes et seulement 5 équations), mais elles déterminent leurs différences. On obtient la différence des hauteurs, A—F des points extrêmes en additionnant toutes les égalités (m)

membres à membres, et simplifiant l'égalité obtenue. La cote B se trouvant dans les deux membres de cette égalité peut être supprimée; il en est de même de C, D, E. Toutes réductions faites, on trouve finalement :

$$A+a+b+c+d+e=b'+c'+d'+e'+f'+F$$

ou

$$A+s=F+s',$$

s désignant la somme des coups arrière et s' celle des coups avant.

On déduit de là $\quad F-A=s-s'$, ou $A-F=s'-s$.

suivant que la somme s est plus grande ou plus petite que s'.

Nous avons déterminé la différence de hauteur de A et de F. On obtiendrait évidemment de même la différence de hauteur de deux quelconques des points considérés. Voici la règle générale.

16. Règle. *Ayant effectué un nivellement composé entre deux points du terrain, on obtient leur différence de hauteur en faisant d'une part la somme des coups arrière, de l'autre la somme des coups avant donnés entre ces deux points, puis retranchant la plus petite somme de la plus grande; la différence est le résultat cherché. Le point d'arrivée est plus haut ou plus bas que le point de départ suivant que la somme des coups arrière est la plus grande ou la plus petite.*

17. On applique cette règle avec facilité en inscrivant les coups de niveau, à mesure qu'on les obtient sur un tableau préparé à l'avance.

POINTS NIVELÉS.	COUPS DE NIVEAU	
	arrière.	avant.
A	$0^m,72$	»
B	0 ,31	$1^m,05$
C	0 ,29	1 ,07
D	1 ,36	0 ,81
E	0 ,53	0 ,78
F	»	0 ,35
	3 ,21	4 ,06
	Différence.	−0 ,85

La composition de ce tableau s'explique d'elle-même. Les points nivelés se désignent par des lettres ou par des indications caractéristiques. Dans cet exemple, la somme des coups avant est la plus grande; le point d'arrivée F est plus bas que le point de départ. (C'est ce qu'indique le signe —. V. le n° 20.)

18. Calcul des cotes de hauteur; cote de départ. Comme le lecteur a pu le remarquer, les opérations de nivellement que nous venons d'expliquer ne se rapportent à aucun plan de comparaison déterminé; aussi ne font-elles pas connaître les cotes de hauteur, mais seulement leurs différences, qui sont évidemment les mêmes quel que soit le plan de comparaison (*).

Dans tout nivellement il y a une *cote de départ;* on appelle ainsi une cote connue d'avance ou choisie arbitrairement de laquelle on part pour trouver toutes les autres. Cette première cote, qu'on appelle aussi *cote d'emprunt* quand elle a été choisie arbitrairement détermine le plan de comparaison qui se trouve à une distance connue d'un point donné. Ce plan étant déterminé, toutes les cotes des points nivelés sont déterminées, et le problème à résoudre est celui-ci :

19. *Étant donnée la cote d'un point* A, *il faut trouver les cotes d'un certain nombre de points* B, C, D, E, F.

Pour cela on peut faire un nivellement par *cheminement* ou un nivellement par *rayonnement*.

Nivellement par cheminement. On détermine successivement les différences de hauteur de A et de B, de B et de C, etc., jusqu'à F par des nivellements simples ou par des nivellements composés. Supposons que tous les nivellements soient simples, on en déduit les égalités (m). La cote A étant connue, ces égalités donnent successivement :

$$\begin{aligned} B &= A + (a - b'), \quad \text{ou} \quad B = A - (b' - a). \\ C &= B + (b - c'), \quad \text{ou} \quad C = B - (c' - b). \qquad (n) \\ D &= C + (c - d'), \quad \text{ou} \quad D = C - (d' - c). \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

(*) En effet, si l'on change le plan horizontal de comparaison, toutes les hauteurs augmentent ou diminuent de la même quantité; leurs différences restent donc les mêmes.

Ces égalités (n) mettent en évidence une règle très-simple pour le calcul des cotes successives.

Mais il peut arriver qu'on fasse un nivellement composé entre deux points A et F pour trouver la cote de F connaissant celle de A; dans ce cas, il est évidemment inutile de calculer les cotes des points intermédiaires. Or on a vu (n° 15) que $A + s = s' + F$; d'où

$$F = A + s - s', \quad \text{ou} \quad F = A - (s' - s).$$

La règle générale doit donc être formulée ainsi:

20. Règle. *On obtient la cote de hauteur d'un point quelconque en augmentant ou en diminuant la cote connue d'un point précédent de la différence des hauteurs de ces deux points. On augmente quand le coup arrière ou la somme des coups arrière donnés entre ces points surpasse le coup avant ou la somme des coups avant; on diminue dans le cas contraire.*

Dans le premier cas, la cote augmente; *on monte*, et la différence des hauteurs est dite *montante*. Dans le second cas, la cote diminue; *on descend*, et la différence est dite *descendante*.

21. On facilite beaucoup le calcul des cotes en inscrivant les coups de niveau et les différences dans un tableau préparé à l'avance.

POINTS NIVELÉS.	COUPS DE NIVEAU		DIFFÉRENCES		COTES de hauteurs.
	arrière.	avant.	montantes.	descendantes.	
A	0m,72	»			60m,
B	0 ,31	1m,05	»	0m,33	59 ,67
C	0 ,29	1 ,07	»	0 ,76	58 ,91
D	1 ,36	0 ,81	»	0 ,52	58 ,39
E	0 ,53	0 ,78	0m,58	»	58 ,97
F	»	0 ,35	0 ,18	»	59 ,15
	3 ,21	4 ,06	0 ,76	1 ,61	
Différences. . .		—0 ,85		—0 ,85	—0 ,85

Les titres des colonnes désignent suffisamment les nombres

qu'elles contiennent. Les trois premières colonnes se remplissent sur le terrain à mesure qu'on donne les coups de niveau; nous les connaissons (n° 17). Pour remplir les deux suivantes, on compare le coup arrière donné sur chaque point au coup avant donné sur le point suivant (ex.: A et B), pour retrancher l'un de l'autre. Si le coup arrière est le plus grand, on écrit le reste dans la 3e colonne (différences montantes); dans le cas contraire, on l'écrit dans la 4e (différences descendantes). On considère ainsi tous les points depuis A jusqu'à F; alors ces deux nouvelles colonnes sont remplies.

Enfin on commence la 5e colonne en y inscrivant la cote connue du point A, 60 mètres par exemple; puis on applique la règle du n° 20. La première différence étant descendante, nous l'avons retranchée de la cote de A; nous avons ainsi trouvé 59m,67 pour la cote de B que nous avons écrite sur la même ligne horizontale que B. Nous avons de même retranché de cette nouvelle cote la différence suivante, qui est encore descendante, et nous avons trouvé 58m,91 pour la cote de C, et ainsi de suite.

Vérifications. On souligne les coups de niveau et les différences, et on additionne les quatre colonnes. On calcule la différence des deux premières sommes, puis celle des deux suivantes, puis la différence de la première cote de hauteurs et de la dernière (5e colonne). On donne à la première différence le signe + ou le signe —, suivant que la somme des coups arrière est la plus grande ou la plus petite. On donne à la seconde différence le signe + ou le signe —, suivant que la somme des différences montantes est la plus grande ou la plus petite. Enfin on donne à la troisième le signe + ou le signe —, suivant que la dernière cote est plus grande ou plus petite que la première. La raison de chacune de ces conventions se voit facilement. Les trois différences obtenues doivent être égales et de même signe (*).

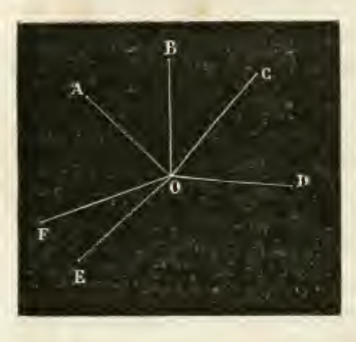
22. *Cas où il a fallu faire un ou plusieurs nivellements composés.*

Dans ce cas, on peut faire encore un tableau tout à fait sem-

(*) Nous avons vu, n° 15, que la différence des hauteurs des points extrêmes A et F est égale à la différence entre la somme des coups arrière et la somme des coups avant. Il est évident d'ailleurs en résumé que, en passant de A à F, on monte ou on descend d'une quantité précisément égale à la différence des montées ou des descentes intermédiaires.

blable; mais on doit calculer à part chaque différence déterminée par un nivellement composé sans calculer les différences intermédiaires, comme il a été dit à la fin du n° 19. Puis on inscrit cette différence entre les deux points auxquels elle se rapporte dans la colonne des différences montantes ou dans celle des différences descendantes. Les différences obtenues, on calcule les cotes demandées seules d'après la règle du n° 20.

23. Nivellement par rayonnement. On choisit un point O du terrain qui soit à peu près également distant du point A et des points à considérer B, C, D, E, F. On donne successivement de O des coups de niveau sur A, B, C, D, E, F. Soient a, b, c, d, e, f, les hauteurs lues sur la mire, et A′ la cote donnée du point A. On ajoute a et A; soit $A + a = A'$; A est la cote du *plan de niveau*, c'est-à-dire sa hauteur au-dessus du plan de comparaison que nous supposerons inférieur à tous les points considérés. Or $B + b = A + a = A'$; d'où $B = A' - b$. On a de même $C = A' - c$, etc. Le nombre A′ une fois trouvé, on obtient donc les cotes des points B, C, D... en retranchant de A′ les coups de niveau b, c, d,... Pour plus de facilité et de régularité on résume le travail du nivellement dans un tableau comme celui-ci.



POINTS NIVELÉS.	COUPS de niveau.	COTE du plan de niveau.	COTES des points nivelés
A	1m,47	61m,47	60m
B	1 ,25		60 ,22
C	1 ,07		60 ,40
D	0 ,94		60 ,53
E	1 ,58		59 ,89
F	1 ,86		59 ,61

24. PLAN DE COMPARAISON. *Ce plan est en général tout à fait arbitraire.* Quand on commence un nivellement dans un but spécial, sans intention de le rattacher à d'autres nivellements faits ou à faire, on donne à l'un des points nivelés une cote arbitraire de laquelle on déduit toutes les autres; c'est ce que l'on appelle une *cote d'emprunt.*

Mais il convient évidemment d'adopter le même plan de comparaison dans tous les nivellements concernant des points susceptibles d'être comparés les uns aux autres : en effet, quand on possède une série de cotes relatives au même plan, il suffit d'une soustraction pour avoir la différence des hauteurs de deux quelconques des points considérés. Nous avons vu comment on déduit une série de cotes d'une première cote choisie ou donnée dans un nivellement par cheminement ou par rayonnement. Quand on doit faire sur le même terrain, étendu dans tous les sens, plusieurs nivellements par cheminement ou par rayonnement, on rattache ces nivellements les uns aux autres en comprenant dans chacun d'eux, à partir du second, un point déjà compris dans un nivellement précédent, à moins qu'il ne se trouve parmi les points nivelés *un point de repère* dont on connaît la cote relative au plan de comparaison choisi (nº 26). La cote connue sert de cote de départ (nºs 18, 19).

Le plan ainsi adopté dans plusieurs nivellements successifs est ce qu'on appelle *un plan général* de comparaison.

25. On adopte ordinairement le même plan de comparaison dans tous les nivellements faits sur le territoire d'une même ville, d'une même commune, d'un même département, etc. Ce plan est souvent choisi d'après certaines circonstances locales; tels sont les deux derniers plans indiqués ci-après pour Paris.

Il vaut mieux autant que possible adopter un plan de comparaison plus universel. Celui dont l'usage prévaut aujourd'hui et qui est même prescrit officiellement est le niveau moyen de la mer idéalement prolongé sous les continents. Les cotes de hauteur relatives à ce niveau prennent le nom particulier d'*altitudes.* L'altitude d'un point peut être déterminé à l'aide d'un baromètre ou d'un thermomètre (V. la physique). Ayant obtenu par ce moyen les altitudes de certains points principaux, on en déduit de proche en proche par des nivellements les altitudes d'autant de points que l'on veut.

26. Points de repère. D'après ce que nous venons de dire, la cote de départ d'un nivellement est le plus souvent une cote connue *à priori*. Elle a été déterminée dans un nivellement précédent, ou bien c'est la cote d'un *point de repère*.

On appelle *point de repère* un point de position aussi immuable que possible dont on connaît la cote de hauteur relative au plan de comparaison choisi. C'est une roche séculaire, une pierre appartenant à un édifice ou à un monument durable, à une colonne, à un puits, à un pont, au seuil d'une maison, ou bien c'est une pierre implantée tout exprès, ou scellée dans un mur comme les repères officiels que l'administration de Paris a fait apposer en beaucoup d'endroits de cette ville.

Ces repères officiels sont des plaques aux armes de la ville dont le rebord supérieur en saillie présente une surface horizontale qui est le repère. On lit sur chaque plaque, 1° *à gauche*, la hauteur du repère au-dessus de la surface moyenne de la mer idéalement prolongée ; 2° *à droite*, la hauteur au-dessus de l'*étiage* du pont de la Tournelle, c'est-à-dire au-dessus du niveau le plus bas de la Seine, *en été*, sous ce pont ; 3° *en bas et au milieu*, la distance du repère au plan général de comparaison adopté pour le nivellement de Paris. Ce plan est à 50 mètres au-dessus de la surface de l'eau dans le bassin de la Villette, alimenté par le canal de l'Ourq.

Les cotes relatives aux deux premiers plans se comptent de haut en bas, à partir du repère; ces plans sont inférieurs. Les cotes relatives au dernier plan qui est supérieur se comptent de bas en haut (n° 29).

Quand on donne un coup de niveau sur un de ces repères, le pied de la mire doit reposer sur la tablette supérieure.

Il serait bien utile que les géomètres eussent ainsi à leur disposition, dans toute la France, des repères officiels rapportés au même plan de comparaison (au niveau de la mer, par exemple).

27. La cote d'un point quelconque A se déduit de celle d'un point de repère M par un nivellement entre M et A.

28. Les points de repère ne servent pas seulement à rapporter un grand nombre de cotes au même plan de comparaison; ils servent aussi, à cause de leur fixité, à vérifier les nivellements à toutes les époques (V. le n° 31). Ces points sont en général spécialement indiqués dans les tableaux de nivellement.

29. Remarque. *On choisit le plan de comparaison inférieur ou supérieur à tous les points nivelés.* Nous avons supposé dans tout ce qui précède le plan de comparaison situé au-dessous de tous les points nivelés; néanmoins on peut choisir un plan de comparaison supérieur. Le nivellement se fait toujours de la même manière; mais alors les plus grandes hauteurs de mire indiquent les points les plus éloignés du plan de comparaison, et ce sont les points les plus bas qui ont les cotes les plus fortes.

Nous continuerons à raisonner et à opérer dans l'hypothèse d'un plan de comparaison inférieur qui est aujourd'hui la plus généralement adoptée. Le lecteur passera d'ailleurs aisément de cette hypothèse à l'autre au besoin.

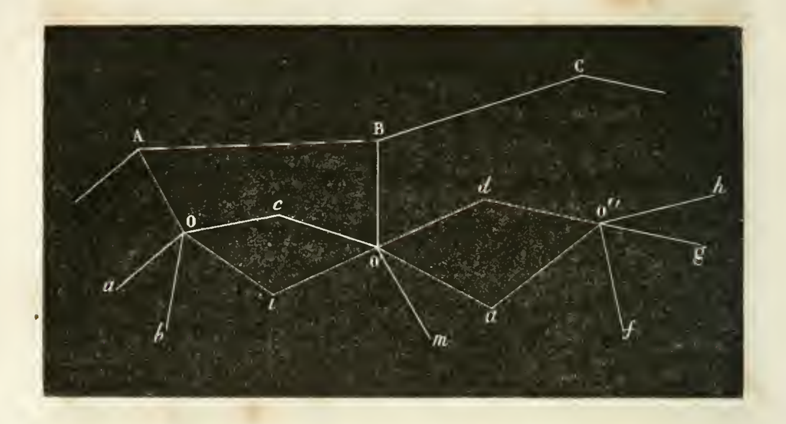
NIVELLEMENT GÉNÉRAL D'UN TERRAIN.

30. Ce nivellement se fait ordinairement par rayonnement. On groupe les points à niveler le plus avantageusement possible; chacun de ces groupes, considérés dans un certain ordre, doit avoir au moins un point commun avec le précédent. On fait le nivellement du premier groupe, puis celui du second en prenant pour cote de départ la cote du point commun à ce groupe et au précédent. On rattache de même le nivellement du troisième groupe à celui du second, et ainsi de suite. On inscrit successivement tous les résultats dans un tableau général qui se compose ainsi d'une suite de tableaux semblables à celui du n° 23 (*V.* ci-après).

Si la cote de départ du premier nivellement est rapportée à un certain plan général de comparaison, toutes les cotes sont rapportées à ce plan; cette première cote est ordinairement celle d'un point de repère qu'on a compris pour cela dans le premier groupe. Si deux groupes consécutifs *ont deux points communs au lieu d'un*, on a une vérification en trouvant deux fois la cote du second point.

Polygone topographique. Pour plus de régularité, on peut procéder au nivellement d'un terrain dans le même ordre qu'à son levé, en se guidant sur le plan géométral déjà construit ou sur un croquis du terrain. On groupe les points à niveler aux environs de certains points principaux A, B, C, D, ..., qui sont ordinairement

les sommets du polygone topographique (Levé n° 85) et un ou plusieurs points de repère. On fait d'abord le nivellement de ces points A, B, C, ..., par cheminement, et on inscrit les résultats dans un tableau spécial (n° 21). Puis on procède au nivellement



des groupes en prenant respectivement pour cotes de départ les cotes des points A, B, C, ... Dans ce cas, si deux groupes ont un point commun, on a une vérification en trouvant deux fois la cote de ce point. Lorsque des points à niveler s'éloignent trop des points principaux A, B, C, ..., on les rattache simplement et de la même manière à un des points déjà nivelés (V. le 3e nivellement ci-après).

Si les points A, B, C, ..., forment un polygone fermé, on doit retrouver à la fin du cheminement la cote de départ; les soustractions indiquées (n° 21) pour vérifications doivent donner des restes nuls ou très-petits (par approximation).

Voici un spécimen du tableau général. Les points nivelés sont désignés sur les tableaux par les mêmes lettres ou par les mêmes signes indicatifs que sur le plan géométral.

STATIONS et repères.	POINTS nivelés.	HAUTEURS de mire.	COTES des plans de niveau.	COTES de tous les points.	OBSERVATIONS.
O	A	1m,476		60m	
A	*a*	1 ,648		59 ,828	
	b	1 ,893	61m,476	59 ,583	
	c	1 ,231		60 ,245	
	i	0 ,867		60 ,609	
O′	B	2 ,876		59 ,670	
B	*c*	2 ,301		60 ,245	
	i	1 ,937	62 ,546	60 ,609	
	d	1 ,919		60 ,627	
	e	1 ,890		60 ,656	
	m	0 ,974		61 ,572	
O″	*e*	1 ,304		60 ,656	
C	*d*	1 ,333	61 ,960	60 ,627	
	f	1 ,518		60 ,042	
	etc.	etc.		etc.	

Voici l'explication de ce tableau :

1er Nivellement par rayonnement. *Station* O. Points nivelés *a*, *b*, *c*, A; la cote de départ est celle de A.

Le premier coup de niveau sur A donne 1m,476; en ajoutant cette hauteur de mire à la cote connue de A, on obtient la cote du premier plan de niveau, 61m,476. On a inscrit dans la 3e colonne les coups de niveau donnés successivement de O sur *a*, *b*, *c*, *i*; puis on a retranché ces nombres de la cote 61m,476 pour avoir les cotes de ces points que l'on a inscrites dans la 5e colonne (n° 23).

2e Nivellement. *Station* O′. Points nivelés B, *b*, *d*, *c*.

On a opéré de la même manière; du coup de niveau donné sur B et de la cote connue de ce point (1er tableau, n° 21), on a déduit par addition la cote 62m,546 du second plan de niveau; puis on a retranché de cette cote les coups de niveau donnés sur *c*, *i*, *d*, *e*, *m*,

pour avoir les cotes de ces points. La cote du point *c*, trouvée pour la seconde fois, offre une vérification.

3e Nivellement. *Station* O″. Points nivelés *d, e, f, g, h;* la cote de départ est celle de *e*.

On se sert de la cote de *e* comme on s'est servi de celle de A et de B. La cote de *d* trouvée une seconde fois offre une vérification. Nous avons supposé (pour exemple) que les points *f, g, h* n'étaient pas à portée convenable d'un des sommets du polygone.

51. Vérification des nivellements.

Quand on opère en long ou sur une petite étendue, on peut vérifier un nivellement en le recommençant dans un sens différent. Quand on opère sur un grand espace, on se procure des vérifications dans le cours même de l'opération, en revenant deux fois au même point (n° précédent), en comprenant parmi les points à niveler des points dont les cotes connues doivent être retrouvées. On fait même quelquefois des nivellements auxiliaires suivant des lignes qui traversent les lignes principales pour avoir des cotes à retrouver.

Les points de repère, vu leur fixité, peuvent servir à vérifier ou à continuer les nivellements à toutes les époques.

L'erreur d'un nivellement fait avec précision ne doit pas dépasser, suivant Busson-Descars, 10 à 12 millimètres par kilomètre de longueur nivelée.

52. Levé du nivellement. On fait ordinairement le nivellement général d'un terrain pour construire un plan coté, c'est-à-dire un plan géométral sur lequel les cotes des points nivelés sont inscrites auprès de leurs projections. On peut relever ces points et les rapporter sur le plan géométral d'après une des méthodes appliquées dans la première partie; on choisit la plus avantageuse. Dans un nivellement comme dans un levé, il est bon de faire un croquis du terrain, sur lequel sont indiqués les points et les lignes à relever et à niveler; on peut à l'avance écrire les cotes sur ce croquis pour les copier ensuite sur le plan.

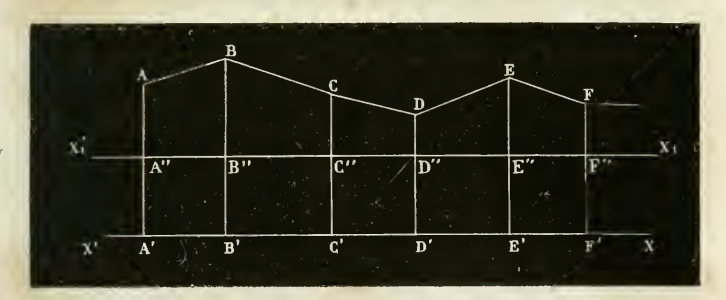
53. Pour plus de rapidité, on peut procéder au levé en même temps qu'au nivellement. On relève le polygone topographique en cheminant pour le niveler. Ensuite, tandis que le niveleur procède au nivellement par rayonnement, un dessinateur, muni d'une

planchette, choisit une station S à portée d'un certain nombre des points à niveler; il relève d'abord le point S en le rattachant à un des côtés du polygone. Puis rayonnant à partir de ce point, il dirige son alidade vers chaque point nivelé, A par exemple, quand la mire est sur ce point; il trace la direction SA, et prend $sa = SA$ (réduit à l'échelle). Il change de station quand il le faut pour relever de cette manière tous les points nivelés. Le travail ainsi fait sur la planchette est ensuite rapporté sur le plan géométral avec les cotes qu'on a pu y écrire au fur et à mesure (V. plus loin le levé des courbes de niveau).

DES PROFILS.

34. Pour étudier en particulier la forme d'une ligne du terrain et rendre visible ses pentes et ses ondulations, on en fait *le profil*.

Ayant fait le nivellement d'un terrain suivant une ligne ABCDEF,



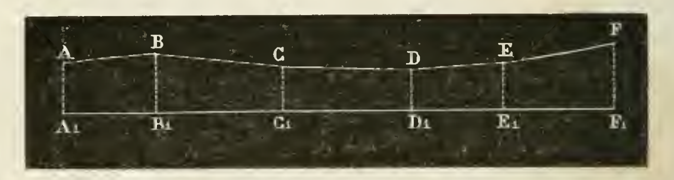
on prend sur une horizontale X'X des longueurs A'B', B'C',... respectivement égales aux distances *horizontales* de A et de B, de B et de C, etc., réduites à l'échelle; on élève sur X'X des perpendiculaires A'A, B'B,... égales aux cotes réduites des points A, B, etc.; enfin on joint par des lignes droites AB, BC,... les extrémités de ces perpendiculaires. La figure ainsi construite est ce qu'on appelle *le profil* de la ligne ABCDEF du terrain.

35. Les opérations du nivellement et un chaînage pour la mesure des distances horizontales, fournissent tous les éléments nécessaires pour la construction du profil.

Connaissant les différences de hauteurs, ex. : BB' — AA', on peut chaîner

parallèlement au terrain; car si celui-ci n'est pas horizontal suivant AB, on calcule A'B' d'après cette égalité $\overline{A'B'}^2 = \overline{AB}^2 - (BB' - AA')^2$.

56. Si les points A, B, C,... du terrain sont suffisamment rapprochés et surtout, ce qui est important, s'ils sont choisis aux endroits du terrain où commencent les pentes et les rampes (vulgairement les descentes et les montées), le profil *montre* d'une manière bien plus frappante que des cotes numériques, si nombreuses qu'elles soient, les pentes diverses et les ondulations du terrain suivant la ligne ABCDEF (*).



57. Afin de rendre ces inégalités plus frappantes, plus sensibles à la vue, on les exagère quelquefois dans une certaine mesure. Pour cela on construit les hauteurs AA', BB',... à une échelle double, quadruple, décuple même de l'échelle des horizontales A'B', B'C',... (**).

D'un autre côté, pour ménager la place, on ne construit à cette échelle plus grande que les cotes diminuées toutes d'un même nombre de mètres; ce qui revient à déplacer l'horizontale X'X pa-

(*) Si la ligne brisée ABCDEF du terrain n'est pas plane, à chaque élément AB correspond un trapèze vertical ABA'B'; tous les trapèzes forment un prisme droit tronqué (semblable à un paravent), et le profil représente le développement de cette surface sur le plan d'une de ses faces. Dans ce développement, chaque ligne AB tournant autour d'une verticale conserve exactement son inclinaison sur l'horizon, c'est-à-dire sa pente; de sorte que le profil offre bien à l'œil les mêmes pentes, les mêmes ondulations que la ligne du terrain, sauf l'exagération dont il est question plus loin.

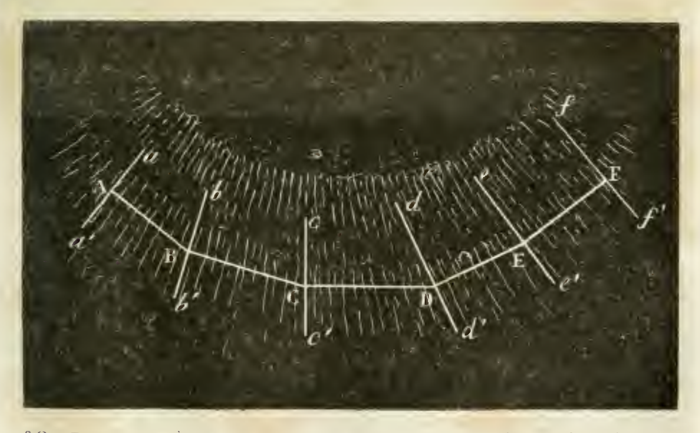
(**) La pente d'une droite AB sur l'horizon est égale au rapport $\frac{BB' - AA'}{A'B'}$ de la différence de niveau des points A et B à leur distance horizontale (nº 63). Si l'on construit les hauteurs à une échelle décuple par exemple de l'échelle des distances horizontales, ce rapport est dix fois plus grand sur le profil que sur le terrain; les pentes sont donc exagérées.

rallèlement à elle-même, pour la rapprocher des points A, B, C,... On n'altère ainsi aucunement la forme de la ligne ABCDEF, dont l'aspect seul donne l'idée des variations de pente et des ondulations du terrain.

38. On écrit habituellement sur le profil les cotes de hauteur le long des verticales, et les distances horizontales le long de X'X entre les pieds des perpendiculaires. A l'une des extrémités de X'X, on écrit le nombre de mètres dont les cotes ont été diminuées sur le dessin. (On connaît ainsi les cotes exactes et les longueurs représentées.) (*V.* la fig. du nº 40).

39. Projet de route, de chemin de fer, de canal.

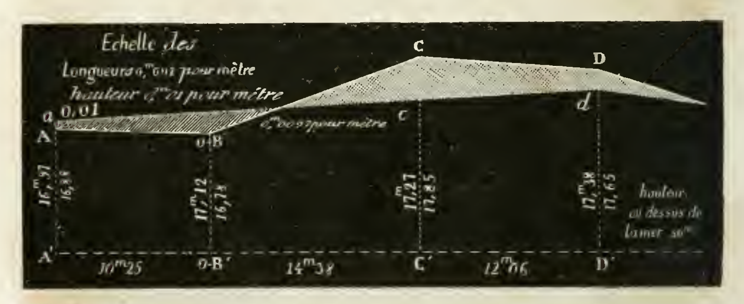
Une ligne quelconque ABCDE... du terrain est déterminée par sa projection horizontale (sur le plan géométral) et par son profil. Mais ce mode de description ne peut servir qu'à étudier la forme du terrain suivant certaines directions données ; il ne peut donc être employé le plus souvent qu'accessoirement à un mode de description plus général. Cependant il y a un cas où il est employé à peu près exclusivement ; c'est quand il s'agit d'un terrain long et étroit comme l'emplacement d'une route projetée, d'un chemin de fer, d'un canal. L'étude d'un pareil terrain se fait à l'aide d'un *profil en long*, et d'un certain nombre de *profils en travers* annexés au plan géométral.



40. Profil en long. Quand un nivellement doit servir à faire un projet de route, de chemin de fer ou de canal, on commence par

tracer sur le sol dans la direction choisie, à peu près vers le milieu de l'emplacement, une série de lignes droites consécutives. Sur le parcours de cette ligne brisée, on plante des piquets à des distances convenables pour le nivellement, et telles qu'entre deux piquets consécutifs la pente du sol soit sensiblement régulière. On fait ensuite en cheminant le nivellement des points piquetés que l'on a eu soin de numéroter; on mesure en même temps leurs distances et même les angles que font les droites, quand leurs directions changent *parallèlement à l'horizon*. Avec les éléments fournis par ce travail sur le terrain que l'on inscrit habituellement sur un croquis du profil ou dans un tableau, on construit le plan géométral et le profil du chemin de fer ou du canal, comme il a été indiqué n° 34; c'est ce qu'on appelle le *profil en long* (V. la fig. du n° 36).

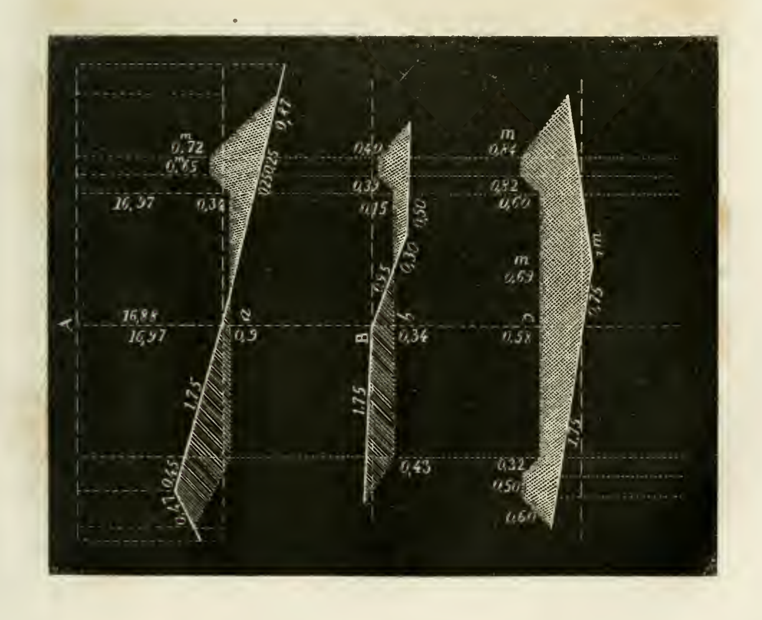
A la ligne du profil en long tracée sur le sol tel qu'il est primitivement, correspond verticalement une ligne de profil tracée sur la route supposée achevée. On trace à l'avance et *en projet* ce second profil sur le même dessin que le premier en le rapportant



au même plan de comparaison. Cette seconde ligne se construit d'après certaines conditions de pente (n° 63), et de manière que les frais d'établissement du chemin ou du canal soient les moindres possibles. On inscrit de part et d'autre de chaque verticale, A'A*a*, les cotes des points A et *a* des deux lignes de profil. Les différences de ces cotes indiquent, d'après la figure, la profondeur de la terre à enlever par endroits (*le déblai*), ou la hauteur de la terre à rapporter dans d'autres (*le remblai*), le long de la ligne ABCDEF. Les déblais sont indiqués sur notre figure par des hachures croisées, et les remblais par des hachures simples.

41. Profils en travers. On plante des piquets, dits *piquets d'axe,* aux points du profil en long par lesquels on veut faire passer des profils en travers. On trace sur le sol, en chacun de ces points, une perpendiculaire à la ligne du profil en long sur toute la largeur de la route projetée (V. l'avant-dernière fig.); on plante sur cette perpendiculaire un certain nombre de piquets. Cela fait, on procède au nivellement de chaque perpendiculaire qui se fait ordinairement en rayonnant vers les points piquetés, à partir d'une station choisie auprès de la ligne du profil en long (V. la remarque suivante); ce nivellement peut aussi se faire par cheminement. On mesure d'ailleurs les distances des points piquetés; les nombres obtenus s'inscrivent sur des croquis faits sur place ou dans des tableaux (n° 23). Avec ces éléments on construit successivement le plan géométral et les profils de toutes ces lignes transversales; ce sont les *profils en travers.*

Chacun de ces profils en travers se fait en double sur le projet comme le profil en long (profils du sol tel qu'il est et du sol tel qu'il sera); on y indique de même les déblais et les remblais. Les profils en travers étant peu étendus, on les dispose comme ils sont sur



notre figure, en regard du profil en long en les distinguant par les mêmes numéros d'ordre ou marques indicatives que les piquets d'axe correspondants.

42. Remarque. Le nivellement des profils en travers peut souvent se faire en même temps que celui du profil en long. On trace simultanément la ligne du profil en long et les perpendiculaires transversales. Puis, cheminant sur la première on choisit, à mesure qu'on dépasse une transversale, une station O de laquelle on donne des coups de niveau sur les divers piquets de cette transversale, parmi lesquels se trouve le piquet d'axe A.

On fait pour chaque profil en travers un petit tableau de nivellement qui porte, comme le profil lui-même, le numéro du piquet d'axe. Les points sont répartis dans ce tableau de part et d'autre de ce piquet.

On peut, pour simplifier, faire passer l'horizontale X'X de chaque profil en travers par le piquet d'axe. C'est ce que nous avons fait.

DES PLANS COTÉS.

43. *On peut représenter par une seule projection les résultats du levé et du nivellement d'un terrain.*

Ayant fait le nivellement général d'un terrain, on inscrit sur le plan géométral la cote de chaque point nivelé auprès de sa projection ; le plan géométral ainsi complété s'appelle *un plan coté.*

44. Un plan coté doit en général représenter le terrain dans son ensemble, de manière qu'on puisse en étudier la forme dans tous les sens ; il doit fournir les moyens de construire des profils dans toutes les directions. Il faut donc, quand on va faire le nivellement général, examiner le terrain dans un grand nombre de directions, comme si on voulait faire autant de profils, et choisir en conséquence les points à niveler. On marque en général pour cela tous les points élevés ou déprimés où la pente du terrain change d'une manière sensible dans une direction quelconque. On doit donner des coups de niveau sur tous les points saillants naturels ou artificiels, sur les arêtes vives du terrain et sur les berges des ruisseaux et des rivières.

45. Si le sol peu accidenté est tel qu'un petit nombre de points

et de lignes principales suffisent à déterminer exactement sa forme, ou bien si la construction du plan coté a pour but spécial d'indiquer la forme et les pentes de certaines lignes, les points saillants et les contours de certains ouvrages, exemple : les cours d'eau, les rues et les ruisseaux d'une ville, ses établissements principaux, il suffit d'inscrire sur le plan géométral un petit nombre de cotes appartenant à ces points ou déterminant les pentes de ces lignes. Le plan avec ces cotes indique clairement ce qu'on veut savoir, et suffit à son objet.

46. Mais si le sol est accidenté par des éminences et des dépressions naturelles ou artificielles, dont les formes irrégulières et les reliefs ne peuvent être suffisamment indiqués ou déterminés par leurs contours et un petit nombre de points principaux, l'emploi des cotes numériques ne convient plus seul; il en faudrait trop. Des cotes écrites avec deux ou trois décimales surchargent le plan et y produisent, quand elles sont trop nombreuses et trop rapprochées, une confusion telle, qu'il devient impossible de se faire une idée un peu précise de la forme du terrain à un endroit quelconque ou dans une direction donnée. On emploie alors les *courbes de niveau.*

47. COURBES DE NIVEAU. On appelle *ligne de niveau* la ligne que forment sur le plan géométral les projections de tous les points du sol qui ont la même cote; autrement dit, c'est la projection de l'intersection de la surface du sol par un plan horizontal déterminé.

Pour représenter complétement un terrain ondulé ou montagneux, on imagine une série de plans horizontaux équidistants, plus ou moins nombreux, rencontrant le sol entre le point le plus haut et le point le plus bas, et on construit sur le plan géométral les projections de ces sections horizontales, en inscrivant à côté de chaque projection la cote connue de la section qu'elle représente.

Le dessin n'est pas surchargé par les cotes, puisqu'il n'y a pour chaque ligne de niveau qu'une cote que l'on écrit d'ailleurs à l'endroit de cette ligne que l'on veut (V. les fig. des n°s 55 et 86). Cependant un pareil plan coté remplit toutes les conditions voulues (n° 44); c'est ce que nous montrerons après avoir appris à construire les lignes de niveau et démontré quelques propositions sur lesquelles nous devons nous appuyer.

48. Une courbe de niveau se construit par points; pour déterminer ces points sur le terrain, il suffit de savoir faire deux opérations élémentaires que nous allons expliquer à part, pour plus de netteté, et aussi parce que ces opérations se pratiquent dans d'autres occasions.

49. Problème. *Trouver sur le terrain des points situés au même niveau qu'un point donné* A.

Ayant choisi une station à portée du point A, on donne un coup de niveau sur ce point, et on fixe le voyant à la hauteur de la ligne de visée. Puis l'aide portant la mire se déplace vis-à-vis du niveleur qui fait tourner le niveau; l'aide monte ou descend, d'après les signes qui lui sont faits, jusqu'à ce que la ligne de foi se trouve de nouveau à la hauteur de la ligne de visée; le point B où se trouve alors la mire est un des points cherchés. Ce point marqué, l'aide se déplace de nouveau vis-à-vis du niveleur en faisant de nouveaux essais semblables, jusqu'à ce que la ligne de visée rencontre encore la ligne de foi. Ainsi de suite; on opère de la même manière, sans changer de station dans toute l'étendue sur laquelle on peut donner des coups de niveau avec une exactitude suffisante. Ayant terminé dans cette limite, on laisse la mire sur le dernier point trouvé D, et on transporte le niveau à une nouvelle station O′ à portée de ce point D et d'une autre partie du terrain. On donne de O′ un nouveau coup de niveau sur le point D; le voyant ayant été baissé ou haussé convenablement, on le fixe à la hauteur de la ligne de visée; puis l'aide se déplace avec la mire pour trouver d'autres points E, F, G, H à portée de la station O′, comme il vient d'être expliqué pour la station O. Ainsi de suite.

50. Problème. *Trouver un point qui soit à une hauteur déterminée au-dessus ou au-dessous d'un point donné* A.

Supposons que la cote donnée de A soit $27^m,32$, et que l'on cherche un point ayant pour cote 28^m (nous supposons le plan de comparaison inférieur.) On met le niveau en station à portée du point A, sur lequel on donne un coup de niveau; on baisse ensuite le voyant de la mire de $28^m - 27^m,32$, c'est-à-dire de $0^m,68$, et on le fixe à cette nouvelle hauteur. Puis l'aide portant la mire se déplace, montant ou descendant d'après les signes du niveleur qui fait tourner le niveau, jusqu'à ce que la ligne de visée ren-

contre la ligne de foi du voyant dans sa nouvelle position; le point B où se trouve alors la mire répond évidemment à la question.

Si le point cherché doit avoir une cote inférieure à la cote donnée, par exemple 27^m, au lieu de baisser le voyant, on le hausse de $27^m,32 - 27^m$, c'est-à-dire de $0^m,32$; puis on opère comme nous venons de le dire pour trouver le point B.

51. Si la différence des cotes était telle que le voyant ne pût être baissé ou haussé d'une quantité égale à cette différence, on subdiviserait celle-ci en deux ou en un plus grand nombre de parties; puis on chercherait successivement des points ayant des cotes de plus en plus rapprochées de la cote finale proposée. Ainsi, pour passer de 37^m à 42^m, on peut passer par les cotes 38^m, 39^m, 40^m, 41^m, pour arriver finalement au point ayant pour cote 42^m.

52. S'il ne se trouve pas de point répondant à la question à portée convenable de la première station du niveau, on peut changer le point A en cherchant d'autres points situés au même niveau (n° 49). On va se mettre de nouveau en station à portée d'un de ces points, et on recommence les essais pour résoudre la question proposée.

53. Il peut se faire que la différence des cotes ou la forme du terrain soit telle qu'il n'y ait pas de point ayant la hauteur proposée dans le voisinage de la ligne de niveau qui passe par le point A; on subdivise alors la différence des deux cotes données et on cherche plusieurs points ayant des cotes intermédiaires jusqu'à ce qu'on arrive à la cote proposée.

54. Application. *Marquer sur une ligne du terrain, dont certains points ont été nivelés, des points ayant des cotes données intermédiaires.*

Il suffit de faire sur chaque partie de la ligne ce que nous allons dire à propos d'une partie AB dont les extrémités A et B ont pour cotes $57^m,48$ et $62^m,24$, par exemple. Il s'agit de marquer sur AB des points qui ont les cotes intermédiaires 58, 59, 60, 61 et 62^m. (Les cotes des lignes de niveau sont ordinairement des nombres entiers.) A partir du point A on cherche, par la méthode

précédente, un point b ayant pour cote 58^m; seulement le porte-mire, au lieu de se déplacer dans une direction quelconque à partir de A, doit suivre la ligne AB. Le point b trouvé et marqué, on en part pour trouver un point c ayant pour cote 59^m, etc..., jusqu'à ce qu'on arrive au point f ayant la cote 62^m. Arrivé là, on peut vérifier l'opération; pour cela on baisse le voyant de 62^m,24—62^m, c'est-à-dire de 0^m,24, et on porte la mire en B. Le niveleur tourne le niveau vers ce point, et la ligne de visée doit rencontrer la ligne de foi dans la position qu'on lui a donnée d'avance.



Si on est obligé de rapprocher les cotes des points cherchés sur AB (*V.* les cas particuliers précédents), on ne marque d'une manière durable que les points qui ont les premières cotes proposées.

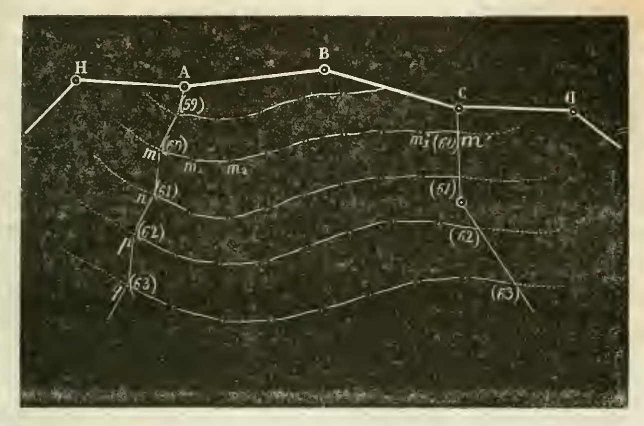
55. Construction des courbes de niveau. Il faut déterminer sur le terrain des points de chaque courbe suffisamment rapprochés, relever ces points et les rapporter sur le plan géométral.

Les sections horizontales sont ordinairement équidistantes; on leur donne pour cotes des nombres entiers compris entre la cote du point le plus élevé du terrain et le point le plus bas. Par exemple, ces cotes extrêmes étant 85^m,9 et 14^m,5, on prend pour cotes des sections les multiples de 5^m compris entre ces deux limites. Cette distance des sections horizontales dépend de la forme du terrain et de l'échelle du plan; elle doit être telle en général que la pente du sol soit partout sensiblement régulière entre deux courbes de niveau consécutives.

Détermination des courbes sur le terrain.

Il peut arriver que le terrain soit long et étroit. Dans ce cas on trace sur le sol des lignes de profil dirigées autant que possible suivant la plus grande pente (V. la fig.). Une de ces lignes passe par le point le plus élevé, et la distance de deux profils consécutifs doit être d'environ 400 mètres. On fait le nivellement des points piquetés sur ces profils, puis on détermine par la méthode du n° 54, les points intermédiaires qui ont pour cotes des multiples de 5^m. On relève tous ces profils et les points marqués et on les rapporte sur le plan géométral. Cela fait, on détermine successivement

toutes les courbes de niveau en opérant pour chacune comme nous allons l'expliquer pour l'une d'elles ; par exemple, pour celle qui est cotée 60ᵐ. Considérant le point m coté 60ᵐ sur un



premier profil, on va se mettre en station à 25 ou 30ᵐ de ce point sur la direction présumée de la ligne de niveau cherchée ; on donne de là un coup de niveau sur m ; l'aide fixe le voyant à la hauteur de la ligne de visée, et transporte la mire de l'autre côté de la station à une distance de 25 ou 30ᵐ sur la même direction ; on cherche à cette distance un point m_1 de même niveau que m, comme il a été expliqué n° 49. Puis, choisissant une nouvelle station au delà de m_1, on détermine de la même manière un troisième point m_2 de la ligne de niveau située à 50 ou 60ᵐ de m_1. Ainsi de suite jusqu'au profil le plus voisin. Supposons que le point m_7 soit le dernier point ainsi trouvé ; on fait une vérification en cherchant sur le profil un point situé au même niveau que m_7 ; on doit retrouver le point m' déjà coté 60ᵐ. Si cette vérification réussit on part de m', comme on est parti de m, pour déterminer de la même manière une nouvelle série de points d'égal niveau distants de 50 à 60ᵐ jusqu'au profil suivant. Ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait traversé tout le terrain. On revient ensuite au premier point m, et on cherche par la méthode du n° 49, entre m et m_1, une série de points de même niveau aussi rapprochés que l'on veut (de 10ᵐ en 10ᵐ, par ex.). Arrivé près de m_1, on vérifie l'égalité de niveau de ce point et du dernier

point trouvé. On procède de la même manière entre m_1 et m_2, et ainsi de suite jusqu'à l'extrémité de la ligne de niveau considérée qui est alors suffisamment déterminée.

Quand le terrain est étendu dans tous les sens, on commence par tracer tout autour un polygone topographique ABCD (V. la fig.) dont on fait le nivellement par cheminement, avec vérifications. On détermine sur chaque côté de ce polygone, par la méthode expliquée n° 54, les points qui ont pour cotes des multiples de 5^m. Puis on trace sur le sol des lignes de profil traversant le polygone suivant la plus grande pente du terrain et distantes au plus de 400^m. On opère sur chaque profil comme on vient de le faire sur le contour du polygone. Cela fait, on relève et on rapporte sur le plan géométral le polygone et tous les profils avec les points marqués. Puis on procède en allant du contour du polygone au premier profil, de celui-ci au second, et ainsi de suite, comme on l'a fait de profil en profil dans le cas précédent.

L'emploi du polygone et des profils dans les deux cas, a pour objet de faire la construction avec plus d'exactitude en se procurant un grand nombre de vérifications.

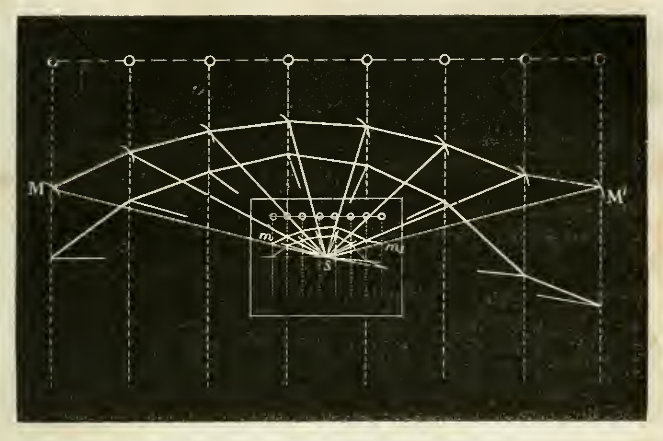
56. *Levé et tracé des courbes sur le plan géométral.*

On peut faire ce levé par les méthodes ordinaires. (*V.* la 1re partie.) On peut aussi, pour plus de rapidité, procéder au levé des points nivelés en même temps qu'on les trouve par le nivellement :

1° *Avec la chaîne et la planchette.* Le niveleur est accompagné de deux aides, un porte-chaîne et un porte-mire, et d'un dessinateur muni d'une planchette. Celui-ci choisit une station S à portée du point de départ M de la ligne cherchée (*); se plaçant en M, il relève d'abord MB, puis MS, et prend *ms* égale à MS (réduite). Il se met ensuite en station au point S, en mettant *sm* sur SM (V. la fig. suiv.). Le niveleur est en station au point O, à portée de M, pour déterminer une première série de points d'égal niveau par la méthode du n° 49. Le premier coup de niveau donné sur M et le voyant fixé, on attache l'une des extrémités de la chaîne au pied de la mire; un des aides maintient sur le sol en M la poignée restée libre, tandis que l'autre promène la mire à l'extrémité de la chaîne tendue, sous les yeux du niveleur qui fait tourner le niveau, jusqu'à ce que la

(*) Les points appelés ici M, M_1, etc., sont les points m, m_1, et du n° 55.

ligne de visée rencontre de nouveau la ligne de foi. La mire est alors en un point cherché M_1; le dessinateur vise la mire, et trace la ligne sm_1 sur laquelle il détermine le point m_1, à l'aide d'un arc de cercle, décrit de m comme centre avec un rayon de 10^m (à l'échelle);



le point m_1 est relevé (*). Cela fait, les deux aides se déplacent; le porte-chaîne vient tenir la poignée en M_1 et son compagnon promène de nouveau la mire à l'extrémité de la chaîne pour déterminer un nouveau point M_2 qui est relevé par le dessinateur. Ainsi de suite; le niveleur et le dessinateur changent de station quand cela est nécessaire. Le dernier a soin de rattacher chaque nouvelle station S' à la précédente S et au dernier point trouvé, que nous appellerons P; pour cela, étant en S', il relève les lignes S'S, S'P, en direction et en grandeur. A mesure qu'un nouveau point est relevé, M_1, par exemple, il joint sur la planchette le point m_1 au précédent m, par un trait continu en imitant à vue d'œil autant que possible la forme apparente de cette partie de la ligne de niveau. Cette dernière étant ainsi relevée sur la planchette, il est facile de la rapporter sur le plan géométral en reproduisant sur celui-ci, à l'échelle de ce plan, tout le travail exécuté sur la planchette à partir de la ligne commune mb. On rapporte ainsi toutes les courbes de niveau.

(*) L'arc de cercle rencontre la droite sm_1 en deux points; mais comme on est sur le terrain, on voit bien quel est celui de ces points qui convient.

REMARQUE. Quand les courbes de niveau sont rapprochées, le dessinateur peut relever plusieurs de ces lignes, ou des parties de plusieurs lignes de la même station S. Quand on arrive sur la première assez loin pour que cette station doive être changée, on commence la courbe de niveau la plus rapprochée de celle-là que l'on conduit aussi loin que possible; puis une troisième, etc.; autant qu'il s'en trouve, à portée de la station S. On fait de même à partir des autres stations S', etc.

57. 2° *Emploi de la chaîne et de la boussole.* On choisit une station S que l'on rapporte sur le plan géométral, en joignant ce point rapporté au point m. A mesure que le niveleur et les deux aides déterminent les points M_1, M_2, etc., comme il vient d'être expliqué, on détermine avec la boussole les angles que font avec la méridienne magnétique, et dans le plan horizontal, les directions SM_1, SM_2, etc. A l'aide de ces angles, on rapporte sur le plan géométral ces directions, sur lesquelles on marque, à l'aide d'arcs de cercle, les points m_1, m_2, etc., comme dans le cas précédent, et on trace les arcs mm_1, m_1m_2, etc., de la courbe de niveau. On peut aussi construire de cette manière plusieurs courbes à la fois.

58. Enfin, *au lieu d'arcs de cercle, on peut employer des perpendiculaires.* On trace, à portée des lignes cherchées sur le sol, une ligne droite ou des lignes droites consécutives, sensiblement horizontales sur lesquelles on élève, à l'aide de l'équerre, des perpendiculaires suffisamment rapprochées; on relève ces lignes auxiliaires sur la planchette (V. la fig. du n° 56). Cela fait, le niveleur et le porte-mire cherchent les points de la ligne de niveau à partir de M par exemple. Mais l'aide, au lieu de promener la mire arbitrairement, la promène sur une première perpendiculaire, puis sur une seconde, etc., pour déterminer sur chacune un point de la ligne de niveau. Le dessinateur, visant la mire quand elle est sur un de ces points M_1, trace la ligne sm_1 dont la rencontre avec la perpendiculaire correspondante du papier, détermine le point m_1 sur la planchette. On joint ces points m, m_1, m_2, par un trait continu, et on rapporte ce travail sur le plan géométral comme nous l'avons expliqué.

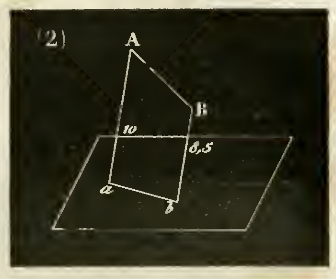
59. REPRÉSENTATION SUR UN PLAN COTÉ D'UN POINT, D'UNE DROITE. QUESTIONS PRATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

DÉFINITIONS. *Un point* est représenté sur un plan coté par sa pro-

jection nettement marquée auprès de laquelle on a écrit sa cote de hauteur.

Les cotes de hauteur s'écrivent ordinairement entre parenthèses ou à l'encre rouge pour être distinguées des nombres qui expri-





ment des distances horizontales. On se dispense des parenthèses quand la confusion n'est pas à craindre.

On désigne habituellement les projections des points A, B, C,..., du terrain par les petites lettres correspondantes *a*, *b*, *c*.... On dit aussi quelquefois le point *a* pour le point dont la projection est *a*.

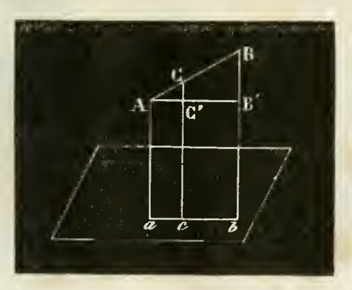
Le point A coté (10) est situé au-dessus de sa projection comme on le voit sur la figure (2).

Une droite AB *du terrain ou de l'espace* est représentée par sa projection *ab* et les cotes de deux de ses points. Elle est située au-dessus du plan de comparaison comme l'indique la figure (2).

Une droite est *horizontale* quand les cotes indiquées sur sa projection sont égales.

Une droite *verticale* est indiquée par un seul point non coté qui est sa projection.

60. Problème. *Trouver la véritable distance de deux points cotés* A *et* B.

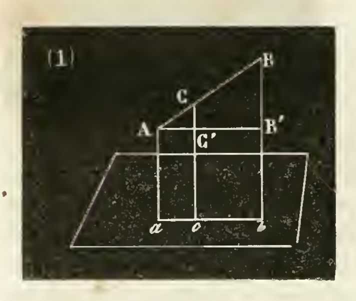


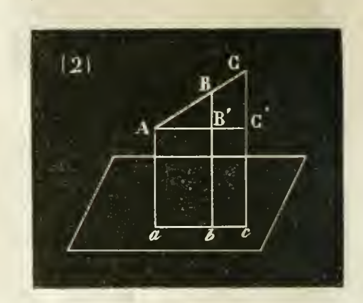
D'après la figure $\overline{AB}^2 = AB'^2 + (Bb - Aa)^2 = \overline{ab}^2 + (Bb - Aa)^2$. Or, A*a* et B*b* sont les cotes données; la ligne *ab* peut être mesurée à l'aide de l'échelle horizontale du plan coté, qui est celle dont il est question dans le levé des plans, n° 28, page 13.

61. Problème. *Trouver la cote d'un point* C *situé sur une droite cotée* AB, *connaissant sa projection* c.

Les cotes Aa, Bb sont données. La longueur de ab est donnée ou peut être mesurée et évaluée au moyen de l'échelle horizontale du plan coté; il faut calculer Cc. Il peut se présenter deux cas : le point C, quand on monte sur la droite AB, se trouve au delà ou en deçà du point le plus bas, A (c est au delà de a dans le sens ab ou en deçà).

1er cas (*fig.* 1 et *fig.* 2). $Cc = C'c + CC' = Aa + CC'$.





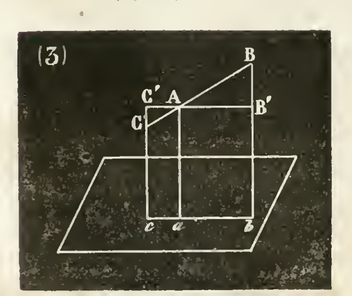
Les triangles semblables ACC', ABB' donnent

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{AC'}{AB'} \quad \text{ou} \quad \frac{CC'}{Bb - Aa} = \frac{ac}{ab}; \quad \text{d'où} \quad CC' = \frac{ac \times (Bb - Aa)}{ab}.$$

Par suite,

$$Cc = Aa + \frac{ac \times (Bb - Aa)}{ab}. \qquad (1)$$

2e cas (*fig.* 3). $Cc = C'c - CC' = Aa - CC'$.



Les triangles semblables ACC' ABB' donnent encore

$$\frac{CC'}{BB'} = \frac{AC'}{AB'} = \frac{ac}{ab};$$

d'où

$$CC' = \frac{ac \times (Bb - Aa)}{ab},$$

et

$$Cc = Aa - \frac{ac \times (Bb - Aa)}{ab}. \qquad (2)$$

Les deux formules (1) et (2) ne diffèrent que par le signe du second terme; la cote de C est plus grande ou plus petite que celle de A de la valeur de ce second terme.

62. Problème. *Trouver la projection d'un point* C *situé sur une droite cotée* AB, *connaissant la cote de ce point.*

On connaît Aa, Bb, ab et Cc; il faut trouver ac. Il peut encore se présenter deux cas; la cote Cc est plus grande ou plus petite que Aa.

1er cas (*fig.* 1 et *fig.* 2). Les lignes à considérer sont les mêmes que dans la question précédente; on connaît $CC' = Cc - Aa$. Les triangles semblables donnent

$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{CC'}{BB'} \quad \text{ou} \quad \frac{ac}{ab} = \frac{Cc - Aa}{Bb - Aa};$$

d'où

$$ac = \frac{ab \times (Cc - Aa)}{Bb - Aa}. \qquad (3)$$

2e cas (*fig.* 3). On connaît $CC' = C'c - Cc = Aa - Cc$.

$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{CC'}{BB'}; \quad \text{ou} \quad \frac{ac}{ab} = \frac{Aa - Cc}{Bb - Aa};$$

d'où

$$ac = \frac{ab(Aa - Cc)}{Bb - Aa}. \qquad (4)$$

63. De la pente d'une droite. On appelle *pente* d'une droite la quantité dont on s'élève ou on s'abaisse sur cette droite quand on s'y déplace d'un mètre en distance horizontale; autrement dit c'est la différence de niveau de deux points quelconques de cette droite, dont la distance horizontale est 1^m.

C'est dans le sens que nous venons d'indiquer qu'on dit que la pente d'une route est de $0^m,05$ ou de $0^m,005$ par mètre.

La pente p *d'une droite s'obtient en divisant la différence des cotes de deux de ses points quelconques* A *et* B *par leur distance horizontale.*

$$p = \frac{BB'}{AB'} = \frac{Bb - Aa}{ab}. \qquad (5)$$

En effet, soit C un point tel que sa distance horizontale AC' ou ac au point A soit d'un mètre. Par définition $p = \frac{CC'}{AC'}$; mais,

d'après la figure $\frac{CC'}{AC'} = \frac{BB'}{AB'}$; notre proposition est donc démontrée.

AUTRE DÉFINITION. On dit aussi : *la pente d'une droite* AB *est la tangente trigonométrique de l'angle que fait cette droite avec sa projection horizontale.*

Cette définition coïncide avec la première; car

$$\text{tang BAB}' = \frac{BB'}{AB'} = \frac{CC'}{AC'} = p.$$

On détermine ordinairement la pente d'une droite définie de l'une ou l'autre manière en appliquant la formule (5).

63 *bis*. Cette valeur $\frac{Aa - Bb}{ab}$ de p se retrouve dans les quatre premières formules. La pente d'une droite, connue ou calculée une fois pour toutes, peut donc servir à résoudre les deux premières questions proposées. Introduisons-la dans ces formules :

Les deux premières deviennent

$$Cc = Aa \pm ac \times p; \qquad (6)$$

et les deux dernières

$$ac = \frac{Cc - Aa}{p} \quad \text{ou} \quad ac = \frac{Aa - Cc}{p}. \qquad (7)$$

64. REMARQUE. Considérons sur une droite donnée AB deux points *quelconques* dont la différence de hauteur soit *un* mètre, et soit d leur distance horizontale, on a

$$p = \frac{1}{d}; \quad \text{d'où} \quad d = \frac{1}{p}. \qquad (8)$$

p étant donné quand la droite est donnée, il en est de même de la distance d qui est d'autant plus petite que la pente est plus forte.

65. ÉCHELLE DE PENTE D'UNE DROITE. *La projection d'une droite est divisée en parties égales qui séparent des cotes entières consécutives; une de ces parties (la première par exemple), est subdivisée en dix parties égales. Une projection ainsi divisée et cotée, est ce qu'on appelle l'échelle de pente de la droite.*



66. On construit facilement l'échelle de pente d'une droite *donnée par sa projection et par les cotes* Aa, Bb *de deux de ses points.*

On détermine, par la formule du n° 62, la projection m du point qui a pour cote le nombre entier immédiatement supérieur à la plus petite cote donnée Aa. Puis on détermine, d'après la formule (8), la distance $d = \frac{1}{p} = \frac{ab}{Bb - Aa}$. Enfin, on porte cette distance d, mesurée à l'échelle horizontale du plan, un certain nombre de fois de part et d'autre du point m, à partir de ce point; et on inscrit aux points de division les cotes entières inférieures et supérieures à celles de m.

67. Il ne faut pas confondre l'échelle de pente d'une droite ni celle d'un plan (*V.* plus loin) avec l'échelle horizontale du plan coté (*V.* n° 60).

68. Il peut arriver que la pente soit trop forte pour qu'il soit possible d'écrire distinctement des cotes différant de 1 mètre seulement; alors on en écrit qui diffèrent de plusieurs mètres, mais toujours équidistantes; la projection ainsi cotée et divisée est toujours une échelle de pente.

69. Quand on compare deux droites par leurs échelles de pentes, il ne faut comparer sur ces lignes que des distances correspondantes à la même différence entre deux cotes. Ex. : sur cd la pente est plus forte que sur ab; sur mn elle est plus forte que sur ab et sur cd; car si l'on subdivise l'un des intervalles de mn en dix parties égales, chaque subdivision sera bien plus petite qu'une division de ab ou de cd.



70. Une horizontale a pour pente zéro; elle porte la même cote dans toute sa longueur.

71. Avec une échelle de pente, on résout sans calcul les deux questions traitées n°s 61 et 62.

1re QUESTION. *Trouver la cote d'un point d'une droite donnée, connaissant sa projection* c (fig. du n° 65). A l'inspection de l'échelle, on voit d'abord que la cote cherchée est comprise entre 14^m et 15^m. Pour l'évaluer à moins de 0,1, on prend une des subdivisions que l'on porte autant de fois que possible du point (14) au point *c*. Ayant pu la porter, 6 fois, on en conclut que la cote cherchée est 14^m,6, à moins de 0^m,1.

2e QUESTION. *Trouver la projection d'un point dont la cote est* 14^m,6. Cette projection est entre le point (14) et le point (15). On porte 6 subdivisions de l'échelle à partir de (14); la projection cherchée *c* est à l'extrémité de la sixième.

72. REMARQUE. On reconnaît que deux droites sont *parallèles* quand elles ont des projections parallèles et la même échelle de pente. Deux droites *se coupent* dans l'espace, quand le point de rencontre de leurs projections porte la même cote sur les deux lignes. La *trace* d'une droite, c'est-à-dire son point de rencontre avec le plan de comparaison est le point qui a pour cote zéro.

REPRÉSENTATION D'UN PLAN.

73. Un plan est déterminé et peut être représenté par trois de ses points cotés, non situés en ligne droite, ou par deux de ses droites parallèles ou non parallèles. Mais on préfère généralement un mode de représentation encore plus simple; on représente un plan par la projection cotée d'une de ses ligens de plus grande pente.

74. On appelle *ligne de plus grande pente* d'un plan une perpendiculaire AB menée à son intersection avec un plan horizontal quelconque MN. Cette ligne est ainsi nommée parce que sa pente est la plus grande que puisse avoir une ligne tracée dans ce plan.

Sur un plan PQ qui rencontre le plan horizontal MN suivant PM, considérons un point A, dont la projection est *a*; menons *a*B perpendiculaire à PM, et joignons AB; on sait que AB est perpendiculaire à PM (Théorème des trois perpendiculaires). Com-

parons la pente de AB à celle d'une autre droite qui la rencontre dans le plan PQ, à la pente de AC, par exemple. La projection de AB est aB et sa pente égale à $\frac{Aa}{aB}$; la projection de AC est aC et sa pente $\frac{Aa}{aC}$. Or aB, perpendiculaire à PM, est plus courte que l'oblique aC; donc la pente de AB est plus grande que celle de AC. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. L'horizontale PM est elle-même sa projection sur le plan MN; elle est perpendiculaire à aB. Les projections de PM et de AB sur un autre plan horizontal quelconque, parallèles à PM et à aB, sont perpendiculaires entre elles.

75. Il résulte de là qu'un plan est complétement déterminé par la projection *ab* d'une de ses lignes de plus grande pente. En effet, en donnant cette projection, on donne en même temps celle d'une horizontale quelconque du même plan; car pour en avoir une, il suffit de mener une perpendiculaire *ced* à *ab*, et de donner à *c* et à *d* la cote du point *e* de *ab*.

76. Échelle de pente d'un plan. On appelle *échelle de pente d'un plan* l'échelle d'une de ses lignes de plus grande pente. Quand l'échelle de pente d'une droite doit ainsi représenter un plan, on double le trait qui figure la projection de cette droite.

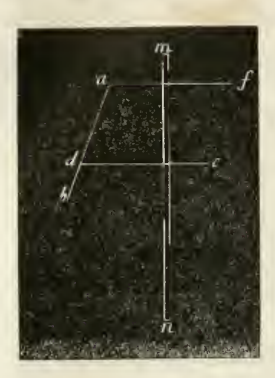


Nous allons montrer comment on passe d'un des trois systèmes de représentation, d'abord indiqués n° 58, à celui-ci. Puis nous montrerons par quelques exemples comment on résout les questions proposées sur un plan représenté par son échelle de pente.

77. Problème. *Construire l'échelle de pente d'un plan qui passe par trois points cotés* a, b, c.

On joint *a* et *b*, puis on cherche sur *ab* la projection *d* d'un point ayant même cote que *c*, et on joint *c* et *d*. La droite *cd* est la

projection d'une horizontale du plan, et sa cote est celle du point c. On mène par le point a une parallèle af à cd; af est la projection d'une autre horizontale du plan dont la cote est la même que celle de a; on mène une perpendiculaire mn à cd ou à af, et on double le trait. En effet, mn est la projection cotée d'une des lignes de la plus grande pente du plan (V. la remarque du n° 74). On peut construire l'échelle de pente de mn en appliquant la règle du n° 66.



78. Problème. *Construire l'échelle de pente d'un plan qui contient deux droites données parallèles ou non parallèles.*

On considère sur ces deux lignes trois points cotés non en ligne droite, deux points sur l'une et un sur l'autre; puis on opère comme il vient d'être dit.

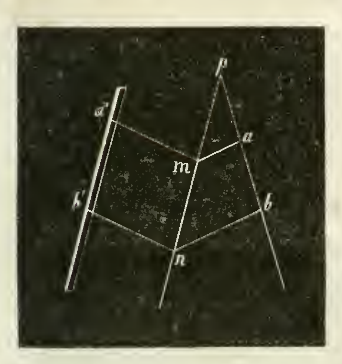
79 Problème. *Construire l'intersection de deux plans donnés par leurs échelles de pentes ab, $a'b'$.*

On prend sur ces deux lignes deux points portant la même cote (12); on mène par le premier point (12) une perpendiculaire à ab, et par le second une perpendiculaire à $a'b'$; le point de rencontre m de ces perpendiculaires est un point de l'intersection cherchée, ayant la cote (12). (Les horizontales (12)m, (12)m situées dans le même plan horizontal (coté 12) perpendiculaires à deux droites (parallèles à ab et $a'b'$) qui se coupent, se coupent aussi.) Par deux autres points b et b', de ab et de $a'b'$, ayant la même cote (17), on trace deux autres perpendiculaires à ces lignes; ce qui donne un nouveau point n de l'intersection ayant la cote (17). On joint m et n; on a ainsi la projection de l'intersection et les cotes

de deux de ses points : on peut construire son échelle de pente. Il est évident que l'on obtient immédiatement cette échelle de pente, en menant des perpendiculaires aux deux échelles données *ab*, *a'b'*, par les points de divisions correspondants.

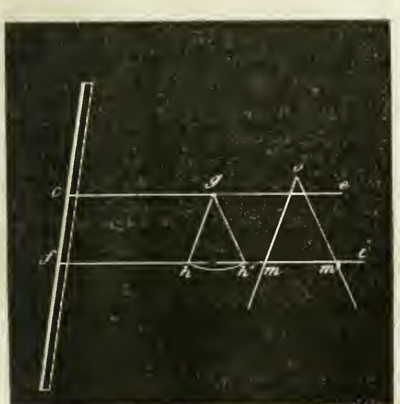
80. Problème. *Trouver l'intersection d'une droite* ab *et d'un plan* a'b' *données par leurs échelles de pente.*

On considère *ab* comme l'échelle de pente d'un plan, et on construit l'intersection *mn* de ce plan et du plan donné *a'b'* (n° 79). On prolonge *mn* jusqu'à sa rencontre en *p* avec *ab* ; le point *p* est le point cherché. En effet, les droites *ab* et *mn* sont dans le même plan, et leurs projections se coupent ; donc ces droites se coupent. D'ailleurs *mn* est dans le plan donné *a'b'* ; le point *p* est donc sur le plan *a'b'* et sur la droite *ab*.



81. Problème. *Mener par un point* o, *dans un plan représenté par son échelle de pente une droite qui ait une pente donnée* p.

Par deux points de division consécutifs *c* et *f* de l'échelle, on mène deux horizontales *ce*, *fi*. On calcule la distance $d = \frac{1}{p}$, et on prend sur l'échelle horizontale du plan (n° 60) une longueur égale à *d* ; puis d'un point *g* pris sur *ce* avec un rayon égal à *d*, on décrit un arc de cercle qui rencontre *fi* en deux points *h* et *h'* ; on trace *gh* et *g'h'*. Enfin, on mène par le point *o* une parallèle à *gh* ou à *g'h'*, et la question est réso-



lue. En effet, gh a évidemment pour pente $\frac{1}{d}$; mais $\frac{1}{d}=p$, puisqu'on a pris $d=\frac{1}{p}$.

Pour que le problème soit possible, il faut que la distance d soit au moins égale à $cf=1$. Si $d=1$, ou en général $d=cf$, la ligne cherchée est une ligne de plus grande pente, et il n'y a qu'une solution; si l'on trouve $d<1$, ou en général $d<cf$, le problème proposé est impossible.

PROBLÈMES RÉSOLUS A L'AIDE DES COURBES DE NIVEAU.

82. Les sections horizontales sont suffisamment rapprochées, quand une droite quelconque, allant d'une ligne de niveau à la suivante sur le sol, peut être considérée sans trop grande erreur comme située en entier sur la surface du terrain. Le plan coté fournit alors immédiatement, avec une approximation suffisante pour la résolution des questions topographiques, tous les éléments qu'on obtiendrait par des nivellements.

83. *On connaît ou on peut facilement déterminer la cote d'un point quelconque* C *dont la projection* c *est indiquée sur le plan.*

En effet, si ce point n'est pas situé sur une ligne de niveau, il peut être considéré comme situé sur une ligne ACB du terrain dont la projection serait la ligne acb menée par c entre les deux courbes de niveau voisines. La question à résoudre est celle du n° 61; on lit sur les courbes les cotes de A et de B; on peut mesurer ab, ac à l'échelle horizontale du plan; on a donc tout ce qu'il faut pour calculer la cote Cc par la formule (1) indiquée dans ce numéro.

84. *On détermine facilement la pente d'une droite quelconque représentée sur le plan.*

En effet, si cette ligne rencontre deux lignes de niveau en a et en b, on connaît les cotes Bb, Aa et la distance horizontale ab; on peut donc calculer la pente $p=\frac{Bb-Aa}{ab}$.

85. *On peut déterminer la pente d'une ligne quelconque* abcde *en un point donné quelconque* m *de cette ligne.*

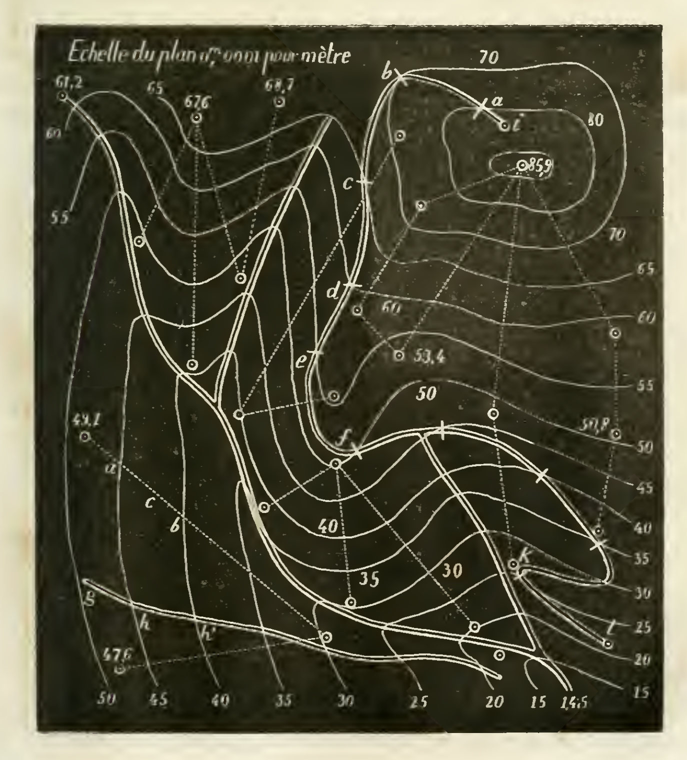
En effet, si la portion de cette ligne qui passe par le point m peut être considérée comme une ligne droite entre les deux courbes de niveau voisines, on résout pour ce segment rectiligne la question précédente.

Dans le cas contraire, on mène par le point m une tangente à la courbe entre les deux lignes de niveau voisines, et on détermine la pente de cette tangente qui est celle de la courbe à l'endroit considéré.

86. Des profils. *Pour mieux étudier la forme du terrain suivant une ligne donnée* abcde,..., *on peut construire le* profil *de cette ligne.*

Le plan coté fournit immédiatement tous les éléments nécessaires.

Si les courbes de niveau sont assez rapprochées, on peut considérer les segments ab, bc, cd, de,... de la ligne proposée compris entre ces lignes comme sensiblement rectilignes. On connaît les



cotes de a, de b, de c, ... et les distances horizontales ab, bc, cd, ...; on construit aisément le profil (nº 34). Au besoin, on peut marquer des points intermédiaires dont on calcule les cotes, et on construit le profil plus exactement.

87. Problème. *Construire sur un plan coté un chemin ou une rigole d'irrigation ayant une pente régulière donnée* p.

Soient en général h la différence des cotes de deux courbes de niveau consécutives, et d la projection horizontale de la portion du chemin comprise entre ces deux lignes, que nous considérons comme droite. La distance d étant connue, on aurait $p = \frac{h}{d}$ (nº 63); on a donc $d = \frac{h}{p}$; on calcule la valeur de d d'après cette formule. $\left(\text{Ex.} : h = 2^m, \text{ et la pente est de } 0^m,01 \text{ par mètre, } d = \frac{2^m}{0,01} = 200^m.\right)$
Si le chemin part d'un point a situé sur une des courbes de niveau, on décrit de ce point a, comme centre, avec un rayon égal à la distance d mesurée sur l'échelle horizontale du plan, un arc de cercle qui coupe la courbe suivante en un point b; on trace ab. Puis, de b comme centre avec le même rayon, on décrit un nouvel arc de cercle qui rencontre la courbe suivante en c, et on trace bc; et ainsi de suite.

Afin d'éviter les changements de direction trop brusques, on ne joint pas a et b, b et c, c et d, etc., par des lignes droites; on arrondit, comme nous l'avons fait, ces diverses parties du tracé. La ligne $abcde$, ... représente une ligne ABCDE... du terrain qui a sensiblement dans toute son étendue la pente donnée p.

Remarques. Le 1er arc de cercle coupe généralement la courbe suivante en deux points b et b'; le 2e coupe la 3e courbe en c et en c'. Au lieu de ab, on pourrait tracer ab'; au lieu de abc, on pourrait tracer $ab'c$, abc', $ab'c'$, etc.; c'est-à-dire qu'on peut construire un chemin ou une rigole ayant la pente donnée dans un certain nombre de directions différentes. On choisit celle qui convient le plus d'après certaines considérations qui dépendent des lieux ou de circonstances que nous ne pouvons prévoir ici.

Si le point de départ i ne se trouve pas sur une courbe de niveau, on calcule la différence entre la cote de ce point et celle de

la courbe suivante. Soit h'; on calcule $d' = \frac{h'}{p}$, et on se sert de d' comme il a été dit précédemment à propos de d; ayant obtenu ainsi un deuxième point de a du chemin, on part de a pour continuer comme il vient d'être expliqué.

Si l'un des arcs décrits ne faisait que toucher la courbe, il n'y aurait en cet endroit qu'une direction possible au lieu de deux; la pente donnée serait précisément égale à la plus grande pente du terrain en cet endroit.

Si un arc de cercle n'atteint pas la courbe, c'est que la pente donnée surpasse la plus grande pente du terrain en cet endroit, et il faut revenir sur ses pas pour choisir et essayer une des autres directions possibles. Si l'on est encore au point de départ du chemin ou s'il faut y revenir, le problème proposé est impossible.

88. Problème. *Construire un chemin ou une rigole qui ait une pente donnée pour aller d'un point* g *à un autre point donné* s.

On trace, à partir de g d'abord, puis, à partir de s, deux lignes qui aient la pente donnée, comme il vient d'être expliqué, en choisissant parmi les directions possibles pour ces deux lignes deux tracés qui se rencontrent en un point o, par exemple. On suit le premier tracé de g en o, et le second de o en s.

89. Problème. *Déterminer la ligne de plus grande pente du terrain à partir d'un point donné* a.

Du point a comme centre, on décrit un arc de cercle qui touche seulement en b la courbe de niveau suivante (en descendant); on trace le rayon ab (Ce rayon est perpendiculaire à la courbe en b). Du point b comme centre, on décrit un second arc de cercle qui touche seulement la courbe suivante en c; on trace le rayon bc; ainsi de suite. La ligne ABCD... du terrain représentée par $abcd$..... est la ligne de plus grande pente à partir du point A projeté en a.

Questions pratiques résolues immédiatement sur le terrain.

90. Comme on le voit, il est facile de résoudre à l'aide d'un plan coté toutes les questions à propos desquelles on ferait des nivellements; mais il peut arriver que, n'ayant pas de plan coté, on ait à résoudre promptement, dans un but spécial, les questions précédentes ou d'autres analogues. Il faut donc savoir

résoudre ces questions sur le terrain avec la mire, le niveau et la chaîne ; nous allons indiquer la solution de quelques-unes.

91. Problèmes. *Déterminer la pente du terrain suivant une ligne droite* AB. On applique la formule $p = \frac{Bb - Aa}{ab}$; on trouve la différence de hauteurs $Bb - Aa$ par un nivellement entre A et B, et ab par un chaînage, comme il a été indiqué n° 35.

92. Problème. *Mesurer la pente du terrain suivant une ligne quelconque* ABCDE. On marque sur cette direction un certain nombre de points A, B, C, D, E,... dans des conditions indiquées pour faire un profil (n° 36) ; puis, considérant les segments AB, BC, CD, etc., comme des lignes droites, on détermine, comme il vient d'être dit, la pente de chacune. Il est bon de faire dans ce cas le profil de la ligne ABCDE avec les mêmes éléments qui servent au calcul des pentes.

93. Problème. *Tracer sur le terrain une ligne ayant partout la même pente donnée.* (C'est la question du n° 87.)

Supposons que la pente donnée soit de $0^m,005$ par mètre ; supposons de plus que la pente du terrain, dans le parcours à suivre, puisse être regardée comme sensiblement régulière sur chaque étendue de 10 mètres. La pente constante doit être de 5 centimètres par 10 mètres ; on donne un coup de niveau sur A, puis on hausse le voyant de 5 centimètres. On attache l'une des extrémités de la chaîne au pied de la mire ; un aide tient l'une des poignées fixe en A, tandis qu'un autre portant la mire promène cet instrument à l'extrémité de la chaîne tendue vis-à-vis du niveleur qui fait tourner le niveau, jusqu'à ce que la ligne de visée rencontre de nouveau la ligne de foi ; soit B le point sur lequel se trouve alors la mire ; on trace la droite AB. On hausse de nouveau le voyant de 5 centimètres, le porte-chaîne vient tenir sa poignée en B, et on recommence la même opération pour trouver un nouveau point C qui soit plus bas que B de 5 centimètres ; on trace la ligne BC. Ainsi de suite ; le niveleur change de station quand il le faut. La ligne ABCD... ainsi trouvée a partout la pente indiquée.

Si l'opération ne réussit pas dans une de ses parties, la ligne cherchée ne peut être continuée dans la direction que l'on suit au delà du point où on est rendu. Si cette direction n'est pas la seule possible (V. n° 87), on essaye dans une autre direction.

94. Problème. *Trouver le point le plus bas ou le plus haut d'une ligne de terrain.*

Un aide promène la mire sur la ligne en question, tandis que le niveleur, en visant continuellement, lui fait signe de baisser ou de hausser le voyant afin que la ligne de foi soit continuellement rencontrée par la ligne de visée. Quand il faut baisser, c'est que le terrain s'élève ; quand il faut hausser, c'est que le terrain descend. Le porte-mire se trouve au point le plus haut quand il cesse de baisser le voyant pour le hausser un peu plus loin ; il est au point le plus bas dans le cas contraire.

Il peut arriver plusieurs fois que le porte-mire cesse de baisser le voyant pour le hausser ensuite ou *vice versâ ;* c'est que la ligne parcourue offre plusieurs angles saillants ou rentrants. On marque les points où on cesse de monter, et ceux où on cesse de descendre (les points saillants et les points déprimés). Si l'on veut trouver le point le plus élevé ou le point le plus bas de la ligne, il faut faire le nivellement des points saillants d'une part, et des points déprimés d'une autre.

95. On peut, par application de cette dernière méthode, trouver *sur le terrain la ligne de plus grande pente à partir d'un point donné* A.

La chaîne est attachée au pied de la mire ; un aide tient la poignée libre en A, tandis qu'un autre aide promène la mire à l'extrémité de la chaîne tendue du côté où le terrain descend, sous les yeux du niveleur, qui, visant continuellement, lui fait signe de hausser le voyant, afin que la ligne de foi soit toujours au niveau de la ligne de visée. Le point où le voyant est le plus élevé est le point le plus bas de la circonférence décrite par le pied de la mire ; soit B ce point ; on trace le rayon AB. Le porte-chaîne vient tenir sa poignée au point B, tandis que le porte-mire décrit un nouvel arc de cercle jusqu'à ce qu'il soit arrivé au point le plus bas de cet arc, en C, par exemple ; on trace le rayon BC. Ainsi de suite.

Nous supposons la pente sensiblement régulière dans chaque direction à une distance de 10 mètres ; dans le cas contraire, on prendrait un rayon moins grand. Nous ne tenons pas compte non plus de la différence entre la longueur d'un rayon AB et celle de sa projection horizontale ; cette différence n'influe pas sensiblement sur la pente (sur une longueur de 10 mètres).

REMARQUE. Nous nous occuperons dans un complément des applications les plus usuelles du nivellemeut à la construction des chemins, à la conduite des eaux et au drainage. Voici une de ces questions.

96. PROBLÈME (question de drainage). *On doit creuser une tranchée profonde de* $1^m,40$ *à son extrémité inférieure, et dont le fond doit avoir une pente uniforme de* $0^m,005$ *par mètre. On propose de déterminer la profondeur du déblai à opérer en un certain nombre de points marqués sur le parcours à suivre.*

Soient A, B, C, D, E, F les points en question, et a, b, c, d, e, f les points du fond de la tranchée qui leur correspondent verticalement.

On détermine par un nivellement les cotes des points A, B, C,... F, et on mesure les distances horizontales de A à B, de B à C, etc. Supposons qu'on ait trouvé les résultats suivants :

Cotes.		*Distances horizontales.*	
A	$3^m,84$	de A à B	$42^m,50$
B	4 ,35	de B à C	38 ,25
C	3 ,40	de C à D	59 ,80
D	3 ,55	de D à E	60 ,40
E	4 ,12	de E à F	45 ,00
F	4 ,00		

Nous allons calculer les cotes de a, b, c, d, e, f pour les soustraire de celles de A, B, C,... F; les différences sont précisément les profondeurs cherchées. Supposons que l'extrémité inférieure du déblai corresponde au point A; la profondeur est $1^m,40$, et la cote de a est $3^m,84 - 1^m,40 = 2^m,44$.

Le point b doit être plus élevé que a de $0^m,005 \times 42,50$ (défin. n° 63); la cote de b est donc égale à

$$2^m,44 + 0^m,005 \times 42,50 = 2^m,44 + 0^m,2125 = 2^m,6525.$$

Le point c est plus élevé que b de $0^m,005 \times 38,25$; la cote de $c = 2^m,6525 + 0^m,005 \times 38,25 = 2^m,84375$.

On trouve de même

$$\text{cote de } d = 2^m,84375 + 0^m,005 \times 59,80 = 3^m,14275$$
$$\text{cote de } c = 3\ ,14275 + 0\ ,005 \times 50,40 = 3\ ,44475$$
$$\text{cote de } f = 3\ ,44475 + 0\ ,005 \times 45,00 = 3\ ,66975$$

En A, il faut creuser à $1^m,40$ de profondeur
en B, c'est à $4^m,35 - 2^m,6525 = 1^m,6975$
en C, $3^m,40 - 2^m,85375 = 0^m,54625$
en D, $3\ ,55 - 3\ ,14275 = 0\ ,40725$
en E, $4\ ,12 - 3\ ,44475 = 0\ ,67525$
en F, $4\ ,00 - 3\ ,66975 = 0\ ,33025$.

Pour plus de simplicité, comme le plan de comparaison est arbitraire, on peut donner à A pour cote d'emprunt la profondeur indiquée $1^m,40$. La cote de *a* est alors 0, et celles de *b, c, d, e, f* s'obtiennent par une simple multiplication.

97. Rappelons en terminant que nous avons résolu précédemment ces questions principales :

1° *Trouver sur le terrain des points situés au même niveau qu'un point donné* A (n° 49).

Application. *Tracer sur le terrain à partir d'un point donné* A *une ligne sans pente, c'est-à-dire une horizontale.* C'est une ligne de niveau à construire comme il a été indiqué n° 55.

2° *Trouver sur le terrain un point ou des points situés à une hauteur donnée au-dessus ou au-dessous d'un point donné* A (n° 50).

Application. *Trouver une droite* AB, *donnée par deux de ses points cotés, un point ayant une cote donnée* (n° 54).

SURFACES DE NIVEAU ; NIVEAU VRAI ; NIVEAU APPARENT.

98. L'objet d'un nivellement n'est pas précisément tel que nous l'avons indiqué (n° 3). Cette opération se fait le plus souvent à propos de l'écoulement et de la conduite des eaux, pour la construction des routes et des chemins de fer.

Or, *l'écoulement des eaux, la facilité plus ou moins grande de la traction d'un point du sol à un autre, ne dépendent pas précisément de la différence de hauteur de ces deux points au-dessus du même plan horizontal, mais de* leur différence de niveau. C'est ce que nous allons vérifier sur un exemple très-simple.

99. Définitions. On appelle *surface de niveau* une surface perpendiculaire en tous ses points à la direction de la pesanteur terrestre. *Exemple.* La surface des eaux tranquilles (V. la physique).

Nous supposerons la terre sphérique; en faisant cette hypothèse, on ne commet aucune erreur sensible dans les nivellements.

La terre étant sphérique, et toutes les directions de la pesanteur passant par son centre, toutes les surfaces de niveau sont des surfaces sphériques ayant le même centre que la terre.

On appelle *ligne de niveau* toute ligne tracée sur une surface de niveau.

Des points sont de niveau quand ils sont situés sur la même surface de niveau, c'est-à-dire également distants du centre de la terre.

On appelle *différence de niveau* de deux points la différence de leurs distances à la même surface de niveau.

On *descend* ou on *monte* sur la terre suivant qu'on se rapproche ou qu'on s'éloigne de son centre.

Vérifions maintenant ce que nous avons avancé n° 98.

Considérons, par exemple, une horizontale DAC tangente en A à la ligne de niveau AMN. Le point A est le point le plus bas de cette horizontale; on descend de C vers A et on monte de A vers C; par suite, *d'après les lois de la pesanteur* (V. la physique), l'eau coule de C vers A et ne saurait couler de A vers C. La pesanteur produit ou favorise le mouvement des véhicules de C vers A, tandis qu'elle empêche ou gêne ce mouvement de A vers C. Or il n'y a pas de différence entre les hauteurs de A et de C au-dessus du même plan horizontal, et il y a entre ces points une *différence de niveau.*



On ne monte ni ne descend sur la ligne AMN; l'eau n'y coule nulle part, pas plus de M vers N que de N vers M. La pesanteur, partout annulée par la résistance du sol, ne gêne ni ne favorise la locomotion ni de N vers M, ni de M vers N; en un mot, rien ne distingue sous ce rapport le point N du point M. Et cependant il y a une différence entre les distances de ces points au plan horizontal DAC; tandis qu'il n'y en pas entre leurs distances à une même surface de niveau quelconque.

Ce que nous avons annoncé n° 98 est donc vrai.

100. La détermination des différences de niveau doit donc être le véritable objet du nivellement; c'est en effet le but qu'on se propose. Mais tandis qu'au moyen d'un niveau on se procure aisément un plan horizontal de comparaison d'une étendue suffisante (le plan de niveau, n° 4), on ne peut pas se procurer une pareille surface de niveau. C'est pourquoi on détermine d'abord les différences de hauteur comme nous l'avons expliqué dans le cours; puis on en déduit aisément, comme nous allons le voir, les différences de niveau.

Exemple: A et B sont des points du terrain entre lesquels on fait un nivellement simple, O le lieu de station du niveau Oo, oa et ob les rayons de visée. Le plan de niveau est donc boa; b_1oa_1 est la surface de niveau qui touche ce plan en o. Les hauteurs verticales lues successivement sur la mire sont Aa et Bb; la différence des hauteurs de A et de B est donc $Aa - Bb$, tandis que leur différence de niveau est $Aa_1 - Bb_1$. Or



$$Aa = Aa_1 + a_1a \text{ et } Bb = Bb_1 + b_1b.$$

d'où $Aa - Bb = Aa_1 - Bb_1 + a_1a - b_1b$,

puis $Aa_1 - Bb_1 = Aa - Bb - (aa_1 - b_1b)$.

Il faut donc déterminer aa_1 et bb_1.

D'après une propriété du cercle, $\overline{oa}^2 = aa_1 \times aF$; d'où $aa_1 = \frac{\overline{oa}^2}{aF} = \frac{\overline{oa}^2}{aa_1 + 2R}$, R désignant le rayon de la terre. oa_1 étant très-petit et négligeable par rapport à 2R, on peut prendre sans erreur sensible

$$aa_1 = \frac{\overline{oa}^2}{2R} \quad \text{de même} \quad bb_1 = \frac{\overline{ob}^2}{2R}; \qquad (\alpha)$$

d'où
$$aa_1 - bb_1 = \frac{\overline{oa}^2 - \overline{ob}^2}{2R}. \qquad (\beta)$$

oa et *ob* sont les distances horizontales de la station O du niveau aux points nivelés A et B; on peut les mesurer au pas; le diamètre 2R de la terre est connu; on peut donc évaluer sans difficulté la différence $aa_1 - bb_1$, et déduire la différence de niveau $Aa_1 - Bb_1$ de la différence de hauteur $Aa - Bb$.

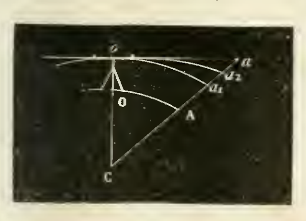
Mais si, conformément à la règle du n° 14, les distances *oa*, *ob* sont égales ou peu différentes, comme d'ailleurs 2R est très-grand (2R vaut environ 12731000 mètres), la différence $aa_1 - bb_1$ est nulle ou très-petite et négligeable; on peut donc, dans ce cas, se dispenser de la correction et regarder, sans erreur sensible, la différence de niveau $Aa_1 - Bb_1$ comme égale à $Aa - Bb$. C'est pourquoi dans les traités de nivellement on se contente souvent de donner cette règle du n° 14, sans même parler de la correction; c'est pourquoi nous-même n'avons parlé que des différences de hauteur.

101. Il est bon cependant que le lecteur connaisse la correction à faire quand on est obligé de placer le niveau à des distances par trop différentes des points nivelés A et B. *Avant d'inscrire les hauteurs de mire sur le tableau, on doit dans ce cas les diminuer des valeurs calculées de* aa_1 *et de* bb_1.

Le plan horizontal déterminé par les lignes de visée est ce que l'on appelle le *niveau apparent;* la surface de niveau qui touche ce plan au point de station du niveau, s'appelle le *niveau vrai;* aa_1 est la différence entre le niveau apparent et le niveau vrai.

102. Pour être tout à fait exact, il y a encore une autre correction à faire; mais celle-là se fait en sens contraire.

De la réfraction. (V. la physique.) La réfraction qui est la plus grande dans le sens horizontal est une autre cause d'erreur dans le nivellement. Ce n'est point le rayon lumineux réfléchi par le point *a* de la mire qui arrive à l'œil *o* dans la direction horizontale *oa*, c'est le rayon lumineux réfléchi par un point inférieur a_2 qui arrive brisé et relevé. La hauteur lue sur la mire est donc Aa_2 et non Aa; Aa diminuée ainsi de aa_2 ne surpasse plus Aa_1 que de a_1a_2.



On a vérifié en général que $aa_2 = 0{,}16aa_1$; donc $a_1a_2 = 0{,}84aa_1$. L'erreur due

à la réfraction atténue donc celle qui est due à l'usage du niveau, et finalement la cote du niveau apparent (la hauteur de mire) ne doit être diminuée que de

$$\frac{\overline{0,840a}^2}{2R}. \qquad (m)$$

C'est une raison de plus pour négliger le plus souvent la correction. D'ailleurs, les erreurs dues à la réfraction s'annulent aussi ou se diminuent mutuellement quand les distances oa et ob sont égales ou peu différentes.

103. Voici au besoin un certain nombre de corrections entre lesquelles on peut en intercaler d'autres à l'aide de proportions; ces corrections sont calculées d'après la formule (m).

DISTANCES en mètres.	ERREUR du niveau apparent.	DISTANCES en mètres.	ERREUR du niveau apparent.
4^m	$0^m,0001$	160^m	$0^m,0017$
60	0 ,0002	180	0 ,0022
80	0 ,0004	200	0 ,0026
100	0 ,0007	300	0 ,0059
120	0 ,0009	400	0 ,0106
140	0 ,0013	500	0 ,0165

La différence entre le niveau apparent et le niveau vrai n'atteint donc un millimètre que si la distance du niveau à la mire surpasse 120 mètres; or cette distance est moindre dans la généralité des nivellements topographiques. Ajoutons à cela que par cela même qu'on emploie les différences de hauteur, les erreurs en question s'entre-détruisent en totalité ou en partie.

QUESTIONS

DU PROGRAMME OFFICIEL DES LYCÉES ET COLLÉGES.

LEVÉ DES PLANS.

NOTIONS SUR LE NIVELLEMENT ET SES USAGES.

NOTIONS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PRÉLIMINAIRES.

1. Les ingénieurs, les architectes, et les constructeurs de machines et d'instruments se servent pour leurs ouvrages d'art et de précision de dessins géométriques sur lesquels ils prennent leurs mesures; ces dessins se construisent par des procédés particuliers dont l'exposition est l'objet de la géométrie descriptive. On apprend, en effet, dans cette partie des mathématiques, à représenter un corps solide, et en général une figure qui n'est pas plane, par deux figures planes ordinairement réunies sur le même dessin, d'après lesquelles on peut reproduire exactement l'objet représenté en véritable grandeur ou dans des proportions données. (*V.* n° 11.)

2. *Les moyens de la géométrie ordinaire ne suffisent pas pour atteindre ce but.*

En effet, une figure plane peut bien être représentée sur le papier en véritable grandeur, ou, à défaut de place, par une figure géométriquement semblable (Géom., n° 143). Dans ce cas, il suffit, comme on sait, de rendre aux lignes leur véritable grandeur pour reproduire d'après le dessin la figure représentée.

Mais une figure qui n'est pas plane, celle d'un corps solide par exemple, ne peut pas être représentée par une figure plane géométriquement semblable, c'est-à-dire ayant ses lignes proportionnelles à celles de la figure représentée, ses angles égaux et semblablement disposés. Cette impossibilité est évidente *à priori;* on peut d'ailleurs la constater nettement pour les figures dont nous nous sommes occupé dans la géométrie ordinaire, et conclure de là pour les autres.

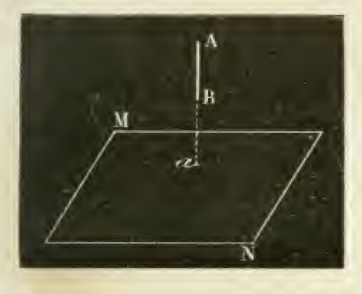
EXEMPLES. 1° *Un cube, un parallélipipède rectangle, un prisme droit :* pour faire une figure semblable à un de ces corps, il faudrait à chaque sommet mener deux perpendiculaires à la même droite; ce qui est impossible sur un plan. 2° *Un polyèdre quelconque :* chacun des angles formés par les arêtes issues du même point est plus petit que la somme de tous les autres; un des angles formés sur un plan par des droites issues du même point est égal à la somme de tous les autres. De l'impossibilité de faire sur un plan une figure géométriquement semblable à un polyèdre *quelconque*, on peut conclure par induction l'impossibilité de représenter ainsi une surface courbe. Nous allons néanmoins citer encore quelques surfaces : 1° Le *cône circulaire droit :* pour faire sur un plan une figure géométriquement semblable à ce cône, il faudrait, ayant représenté la base par un cercle, marquer le sommet en un point du plan autre que le centre et cependant également distant de tous les points de la circonférence; ce qui est impossible. 2° Le *cylindre :* les arêtes parallèles entre elles sont perpendiculaires à des droites qui se coupent (les diamètres des bases); ce qui ne peut être réalisé sur un plan. 3° La *sphère :* pour représenter des grands cercles, il faudrait tracer sur le plan des circonférences distinctes ayant même centre et même rayon; ce qui est impossible. Nous pourrions citer plusieurs genres d'impossibilité pour chacune des figures précédentes; il n'est pas de figure à trois dimensions pour laquelle on ne puisse le faire.

5. Il résulte de ces considérations que les figures par lesquelles on essaye, dans les derniers livres de la géométrie ordinaire, de représenter les figures de l'espace, ne sont, pas plus que les dessins pittoresques qui représentent des objets en perspective plus ou moins régulière, des dessins de précision pouvant servir à construire exactement les objets représentés. Les angles y sont nécessairement altérés; les lignes du dessin et leurs homologues de l'objet représenté ne sont pas dans un rapport constant; leurs rapports divers ne sont en général ni précis, ni déterminés. De pareils dessins ne peuvent donc pas servir à la construction des ouvrages d'art et de précision. On a inventé pour y suppléer des méthodes particulières qui consistent dans l'emploi des projections dont nous allons nous occuper.

REPRÉSENTATION D'UN POINT.

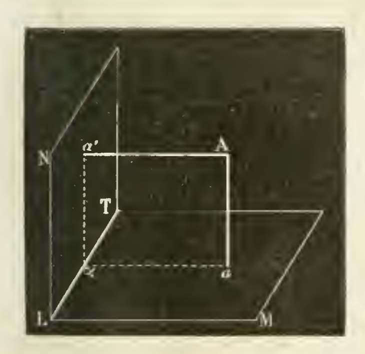
4. La *projection* d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan.

EXEMPLE. *a* est la projection du point A sur le plan MN.



5. *La position d'un point n'est pas déterminée quand on connaît sa projection* a *sur un plan* MN. En effet, on sait seulement que ce point se trouve sur la perpendiculaire *a*A, sans pouvoir le distinguer parmi les points de cette droite qui ont tous pour projection *a*.

Mais un point est déterminé quand on connaît ses projections sur deux plans qui se coupent.



En effet le point dont les projections sont *a* et *a'* sur les plans TM, TN, doit se trouver à la fois sur la perpendiculaire *a*A au plan TM et sur la perpendiculaire *a'*A à TN; ce point n'est donc autre que le point d'intersection A de ces deux lignes.

6. C'est pourquoi on emploie deux plans de projection. Pour plus de simplicité, on prend ces plans perpendiculaires entre eux; c'est ce que nous ferons. L'un des plans de projections TM s'appelle plan *horizontal*, l'autre TN plan *vertical;* l'intersection LT s'appelle *la ligne de terre.*

Ces dénominations ne signifient pas que l'un des deux plans de projection est nécessairement parallèle à l'horizon du lieu; ce sont deux plans rectangulaires quelconques. Mais bien que cela ne soit

pas nécessaire, il est bon, pour fixer ses idées, pour raisonner avec plus de netteté et de facilité, de se figurer l'un de ce plans réellement horizontal, et l'autre vertical.

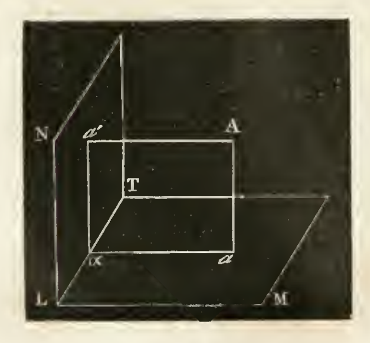
7. Théorème. *Les deux projections* a *et* a' *d'un même point* A *sont toujours situées sur deux droites perpendiculaires à la ligne de terre au même point.*

En effet, le plan aAa' (figure précédente) est perpendiculaire au plan horizontal parce qu'il contient aA perpendiculaire à ce plan et perpendiculaire au plan vertical à cause de $a'A$; il est donc perpendiculaire à l'intersection LT de ces deux plans, qu'il rencontre en un point α (*Géom.*, n° 267), et réciproquement LT lui est perpendiculaire. Tirons $\alpha a'$ et αa ; LT est perpendiculaire à ces deux lignes du plan aAa' ; notre proposition est donc démontrée.

Réciproquement. *Deux points* a *et* a' *pris à volonté sur deux droites* αa, $\alpha a'$, *perpendiculaires à la ligne de terre au même point, sont les projections d'un point de l'espace.*

En effet, le plan $a\alpha a'$ de ces deux droites est perpendiculaire à LT et par suite au plan horizontal TM et au plan vertical TN. Donc, la perpendiculaire élevée en a sur le plan TM, et la perpendiculaire menée en a' sur le plan TN sont situées dans le plan $a\alpha a'$; ces deux lignes, perpendiculaires à deux droites αa, $\alpha a'$ qui se coupent, se coupent elles-mêmes en un point A qui a pour projections a et a'.

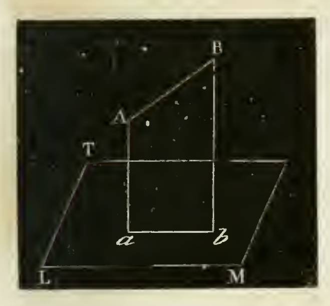
8. Théorème. *La distance d'un point* A *au plan horizontal est égale à la distance de sa projection verticale* a' *à la ligne de terre. Sa distance au plan vertical est de même égale à la distance de sa projection horizontale* a *à la ligne de terre.*



La figure $Aa\alpha a'$ est un rectangle : en effet les angles a et a' sont droits par définition ; l'angle α est droit puisqu'il mesure l'angle des deux plans de projection qui sont rectangulaires ; par suite le quatrième angle A est droit. La figure $Aa\alpha a'$ étant un rectangle, $Aa = a'\alpha$, et $Aa' = a\alpha$. C. Q. F. D.

9. Corollaire. Donner les deux projections a et a' d'un point A de l'espace, revient donc à donner sa projection horizontale a et sa distance aA au plan horizontal. Nous pouvons déjà conclure de là qu'on peut, à l'aide de deux projections, atteindre le but indiqué dans nos préliminaires.

10. *La figure d'un corps solide, ou plus généralement une figure quelconque de l'espace, est déterminée et peut être construite quand on connaît sa projection verticale et sa projection horizontale*



En effet, nous voyons d'abord qu'une droite AB est déterminée par les projections verticales et horizontales de ses extrémités A et B. Cette droite occupe au-dessus du plan horizontal la position indiquée sur notre figure; on connaît ab, aA et bB. La droite peut être construite et mesurée, puisqu'on a tout ce qu'il faut pour construire le trapèze ABba rectangle en a et en b.

Un polygone ABCDEF est déterminé et peut être construit quand on connaît les projections verticales et horizontales de ses sommets. En effet, on peut construire ses côtés comme il vient d'être dit, et aussi ses angles; car chacun de ses angles, ABC par exemple, appartient à un triangle dont on peut construire les trois côtés AB, BC, AC.

Il en est d'un polyèdre quelconque comme d'un polygone. On peut construire ses arêtes, ses faces, ses angles plans dont on connaît la disposition, et par suite ses angles trièdres et ses angles polyèdres.

Une courbe est déterminée par les projections verticales et horizontales d'un certain nombre de ses points assez nombreux et suffisamment rapprochés.

Résumons-nous : une figure quelconque de l'espace est généralement déterminée par certains points et par certaines lignes principales; ces points et ces lignes étant déterminés par leurs projections verticales et horizontales, la figure elle-même est

déterminée et peut être construite à l'aide de ces projections (*).

Ces considérations générales rapidement exposées ont seulement pour objet de montrer qu'il est possible d'atteindre, à l'aide des projections, le but suivant déjà indiqué n° 1 :

11. Objet de la géométrie descriptive. On apprend donc en géométrie descriptive à représenter *d'une manière précise* une figure de l'espace par deux figures planes : *une projection verticale* et *une projection horizontale.* On peut, à l'aide de ces deux projections, reproduire cette figure de l'espace, et résoudre toutes les questions qui s'y rapportent.

12. Pour plus de simplicité et de commodité, on réunit les deux projections sur le même dessin, en les disposant de manière qu'on reconnaisse aisément les points correspondants des deux figures, qui sont deux à deux les projections de chaque point de l'espace.

Pour cela, on imagine que le plan vertical tourne autour de la ligne de terre pour se rabattre sur le plan horizontal. (V. la figure suivante.)

Épure. La double figure que forment après ce rabattement la projection verticale et la projection horizontale d'une figure de l'espace s'appelle *une épure.*

13. Théorème. *Sur une épure quelconque, les deux projections d'un même point sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

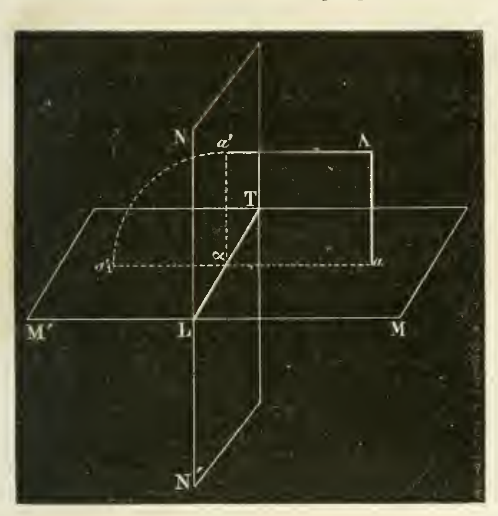
2° *De même qu'avant le rabattement du plan vertical, la distance d'un point de l'espace au plan horizontal est égale à la distance de sa*

(*) La proposition que nous venons de développer est admise sans difficulté quand il s'agit de la représentation d'un terrain (V. le Nivellement). On voit bien que la figure du terrain est déterminée quand on connaît les projections horizontales A', B', C', ... de ses points remarquables et leurs hauteurs A'A, BB', CC', etc., au-dessus du plan de projection. On se figure ces points aux extrémités des verticales AA', BB',..., et on distingue bien la forme des lignes qu'ils déterminent. Connaissant les lignes de la figure, on connaît la figure elle-même. Il en est de même évidemment pour un corps quelconque terminé par des surfaces que l'on connaît de la même manière que celle du terrain.

Le lecteur peut voir dès à présent l'identité de la géométrie descriptive ordinaire et de la méthode des plans cotés. La seule différence, c'est que dans la première, la hauteur Aa est donnée graphiquement sur une seconde figure, tandis que dans la méthode des plans cotés, elle est exprimée par un nombre.

projection verticale à la ligne de terre. La distance de ce point au plan vertical est égale à la distance de sa projection horizontale à la ligne de terre.

Pour le démontrer, considérons avant le rabattement du plan vertical les deux projections a et a' d'un point A de l'espace. Abaissons de a et de a' des perpendiculaires $a\alpha$, $a'\alpha$ à la ligne de terre (n° 7), puis faisons tourner le plan vertical autour de cette ligne LT (de a' vers a' comme l'indique la figure) pour le rabattre sur le plan horizontal. La ligne $a'\alpha$, qui reste dans le mouvement perpendiculaire à LT, se rabat finalement sur la perpendiculaire $\alpha a'_1$ qui n'est autre que le prolongement de $a\alpha$; le point a' décrivant un arc de cercle autour de α comme centre, se rabat en un point a'_1 tel que $\alpha a'_1 = \alpha a'$; $a'_1 \alpha a$ est perpendiculaire à LT; $a'_1\alpha = \alpha' a = \text{A}a$; $a\alpha = \text{A}a'$. Notre proposition est donc complétement démontrée.



14. Remarque. Pour marquer sur une épure les projections d'un même point de l'espace, il suffit donc d'y marquer deux points situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.

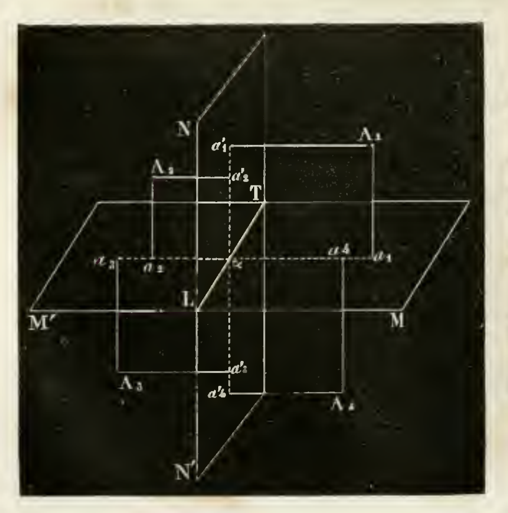


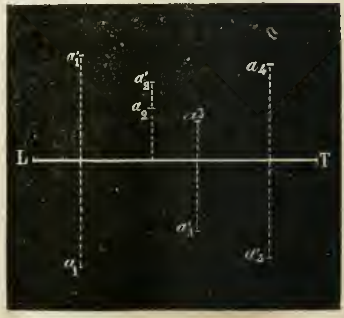
15. En faisant une épure, on suppose ordinairement l'observateur placé en face du plan vertical TN et au-dessus du plan horizontal TM (dans l'angle NLTM), à une très-grande distance de

chacun de ces plans, ayant la lettre L à sa gauche et la lettre T à sa droite. Pour ce spectateur, la partie supérieure TN du plan vertical tourne d'avant en arrière pour se rabattre sur la partie postérieure TM′ du plan horizontal; par suite, la partie *inférieure* TN′ du plan vertical se relève et revient coïncider avec la partie *antérieure* du plan horizontal.

16. La ligne de terre LT est ordinairement représentée par une horizontale qui sépare les deux moitiés du plan horizontal, la partie *antérieure* et la partie *postérieure*. Le plan vertical une fois rabattu, sa partie supérieure est au-dessus de LT, sa partie inférieure au-dessous. Le plan vertical coïncidant partout sur l'épure avec le plan horizontal, on a fait, pour éviter la confusion entre les deux espèces de projections, cette convention générale : on désigne les points de l'espace par de grandes lettres A, B, C, ...; leurs projections horizontales par les petites lettres correspondantes a, b, c, ... et leurs projections verticales par les mêmes petites lettres accentuées a', b', c', ... Quand on veut bien préciser les projections d'un même point, on les réunit par une perpendiculaire à LT figurée en petits traits interrompus (V. notre figure).

La projection verticale a' d'un point A n'est pas nécessairement au-dessus de la ligne de terre, ni sa projection horizontale au-dessous. Ces deux projections peuvent avoir les diverses positions in-





diquées sur la deuxième figure. La situation des projections dépend de celle du point projeté relativement aux plans de projection; les quatre arrangements des projections indiquées sur la seconde figure correspondent aux quatre positions du point projeté indiquées sur la première. Le lecteur se rendra compte de ces diverses situations en ayant égard à ce qui a été dit nos 15 et 16 (*).

Un point peut être situé sur le plan horizontal même; il est lui-même dans ce cas sa projection horizontale, et sa projection verticale est sur la ligne de terre. Un point peut de même être situé sur le plan vertical. S'il est sur la ligne de terre, il est lui-même sa projection verticale et sa projection horizontale.

16 *bis*. Du tracé des lignes d'une épure. Le spectateur, supposé placé comme il a été dit n° 15, voit certaines lignes de la figure projetée, tandis que d'autres sont invisibles pour lui à cause de l'opacité du corps, ou parce qu'elles lui sont cachées par l'un des plans de projection.

Les lignes de l'épure qui représentent des lignes de la figure visibles pour cet observateur se font en trait plein; celles qui représentent des lignes invisibles sont formées de points ronds. Quant aux lignes auxiliaires de construction qui n'appartiennent ni à la figure de l'espace ni à ses projections, elles se font toujours en petits traits interrompus.

REPRÉSENTATION D'UNE DROITE.

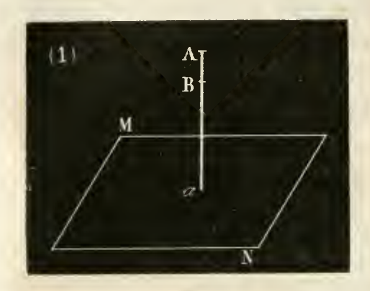
17. *La projection d'une ligne* quelconque sur un plan est la ligne que forment les projections de tous ses points sur ce plan.

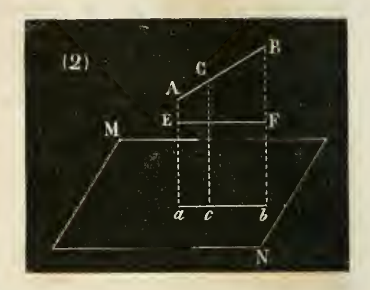
18. Théorème. *La projection d'une droite sur un plan est généralement une droite.*

Il n'y a d'exception que pour le cas où la droite AB est perpen-

(*) On distingue les angles trièdres que forment les plans de projection suivant les portions de ces plans qui les forment. Il y a 1° l'angle *antérieur supérieur* NLTM; 2° l'angle *postérieur supérieur* NTLM'; 3° l'angle *postérieur inférieur* N'TLM' et enfin 4° l'angle *antérieur inférieur* N'LTM.

diculaire au plan de projection ; alors sa projection se réduit évidemment à un seul point *a* (fig. 1).





Soit en général une droite AB à projeter sur un plan MN (fig. 2). Abaissons de A et de B deux perpendiculaires A*a*, B*b* sur ce plan, et joignons *ab ; ab* est précisément la projection de AB. En effet, considérons un troisième point quelconque C de AB, et projetons-le sur MN ; le plan AB*ab* étant perpendiculaire à MN, la ligne C*c* qui projette C ne sort pas de ce plan (Géom., n° 266), et vient rencontrer le plan MN en un point *c*, situé sur l'intersection *ab* des deux plans. La droite *ab* est donc précisément la ligne que forment les projections des divers points de AC ; *ab* est la projection de AB, et notre proposition est démontrée.

19. Remarque. Pour projeter une droite AB sur un plan MN, il suffit de mener une première perpendiculaire A*a* sur MN ; AB et A*a* déterminent un plan BA*a* perpendiculaire à MN, dont l'intersection *ab* avec ce plan est la projection de AB. On peut aussi projeter deux points A et B en *a* et *b*, et tracer *ab*.

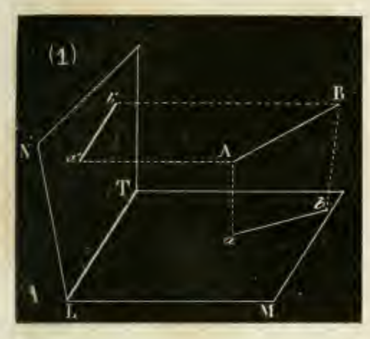
20. Théorème. *Une droite n'est pas déterminée quand on connaît sa projection* ab *sur un seul plan* MN (fig. 1 ci-dessus).

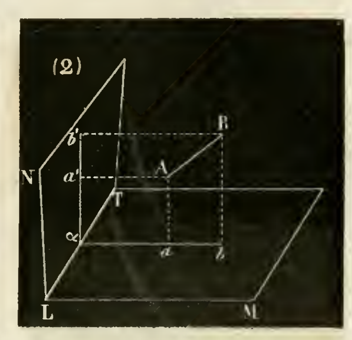
En effet, on sait seulement que cette droite est située sur un plan *ab*AB perpendiculaire à MN, conduit par *ab*, sans pouvoir la distinguer parmi toutes les lignes droites ou courbes situées dans ce plan A*ab*B qui ont toutes pour projection *ab*. Ex. : AB, EF.

21. *Mais une droite est généralement déterminée par ses projections sur deux plans qui se coupent* (fig. 1 ci-après).

En effet, la droite qui a pour projection *ab* et *a'b'* sur les plans TM, TN doit se trouver à la fois dans le plan *ab*AB mené par *ab*

perpendiculaire au plan TM, et dans le plan $a'b'$AB, mené par $a'b'$, perpendiculaire au plan TN ; cette droite ne peut donc être que l'intersection AB de ces deux plans.

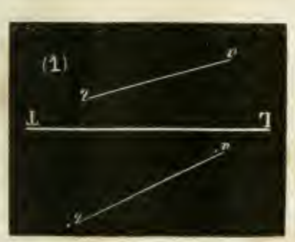




22. Nous avons dit généralement ; car il faut excepter le cas où les deux projections données ab, $a'b'$ sont perpendiculaires à la ligne de terre au même point α (fig. 2). Le plan $b'\alpha b$ est alors perpendiculaire à la ligne de terre, et par suite aux deux plans de projection à la fois. Il n'y a donc plus deux plans projetant la droite ; il n'y en a qu'un ; toutes les lignes situées dans ce plan $b'\alpha b$ ont évidemment pour projections communes ab et $a'b'$; ces projections ne suffisent donc pas pour déterminer une de ces lignes. Quand on veut en distinguer une, AB, on donne ordinainairement dans ce cas les projections (a, a'), (b, b') de deux de ses points A, B.

23. Réciproquement, *deux droites quelconques* ab, a'b'*, tracées sur une épure, sont les projections d'une droite* AB *de l'espace, excepté quand ces lignes sont perpendiculaires à la ligne de terre en des points différents.*

En effet, on démontre facilement que les plans respectivement

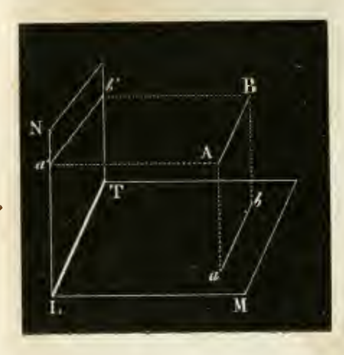




perpendiculaires au plan horizontal et au plan vertical conduits par ces lignes ab, $a'b'$, se rencontrent, excepté dans le cas signalé qui est indiqué dans la figure (2) (*); ab, $a'b'$ sont les projections de l'intersection de ces deux plans.

24. Remarque. Une droite située sur un des plans de projection est elle-même sa projection sur ce plan; sa projection sur l'autre est la ligne de terre.

25. Théorème. *Si une droite* AB *est parallèle à un des plans de projection, sa projection sur l'autre est parallèle à la ligne de terre.*

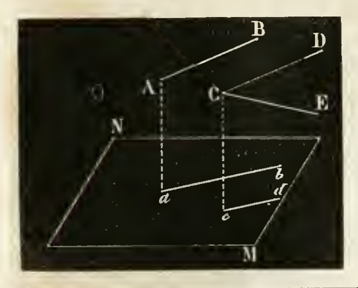


Supposons par exemple AB parallèle au plan horizontal : tous les points de cette droite sont également distants du plan horizontal, et par suite tous les points de sa projection verticale $a'b'$, sont également distants de la ligne de terre (n° 8); cette projection verticale est donc parallèle à la ligne de terre.

Il faut évidemment excepter le cas où la droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection (n° 18).

La droite AB et sa projection horizontale sont évidemment parallèles; car elles sont dans le même plan, et AB ne saurait rencontrer ab, qui est dans le plan horizontal.

26. Théorème. *Les projections de deux droites parallèles* AB, CD, *sur un même plan* MN, *sont parallèles.*



En effet, abaissons sur MN les perpendiculaires Aa, Cc; ces lignes sont parallèles. Les plans BAa, DCc sont donc parallèles (Géom., n° 255); les intersections ab, cd de ces deux plans par le même plan MN sont parallèles. Mais ab, cd sont les projections

(*) En effet, si ces deux plans étaient parallèles, ils seraient tous deux per-

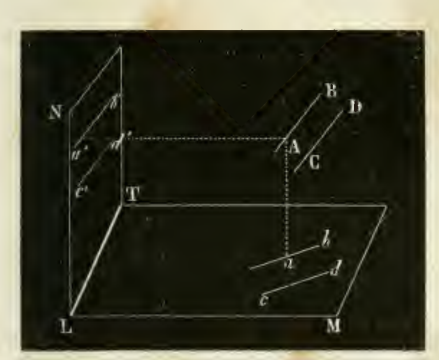
de AB et de CD, (n° 19); notre proposition est donc démontrée.

27. La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie en général : *de ce que les projections de deux droites sur un plan sont parallèles, on ne peut pas conclure avec certitude que ces deux droites sont parallèles.*

En effet, considérons deux droites parallèles AB, CD qui ont des projections parallèles *ab, cd*. Menons par le point C dans le plan horizontal CD*cd* une autre droite quelconque CE; CE a aussi pour projection *cd*. Les deux droites AB, CE qui ne sont pas parallèles, ont cependant des projections parallèles.

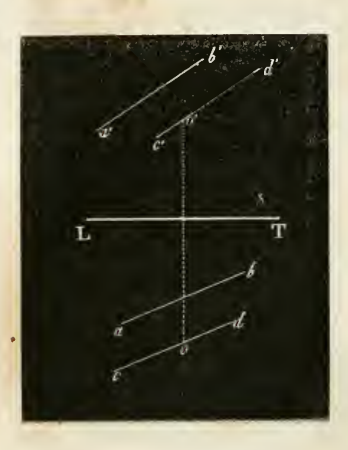
28. *Mais si deux droites ont des projections parallèles sur deux plans qui se coupent, elles sont parallèles, pourvu qu'elles soient déterminées par leurs projections.*

Soient AB, CD deux droites qui ont leurs projections horizontales *ab, cd*, parallèles, ainsi que leurs projections verticales *a'b'*, *c'd'* : ces droites AB, CD sont parallèles. En effet, considérons un point A de AB, et marquons ses projections *a* et *a'* sur *ab* et sur *a'b'*; par le point A il passe une parallèle à CD, une seule; la projection horizontale de cette parallèle qui passe par le point *a* doit être parallèle à *cd*, d'après la proposition précédente (n° 26); cette projection horizontale n'est donc autre que *ab*. On voit de même que la projection verticale de cette parallèle à CD n'est autre que *c'd'*. Cette parallèle à CD a donc les mêmes projections que AB; elle n'est donc autre que AB, puisque AB est déterminée par ses projections.



pendiculaires à la fois au plan horizontal et au plan vertical, et par suite perpendiculaires à la ligne de terre. Or, cela étant, la ligne de terre LT serait perpendiculaire à *ab* et à *a'b'* en des points différents. Les plans en question ne sont donc parallèles que dans le cas indiqué sur la figure 2. n° 23.

La seule exception a donc lieu quand les projections de chaque droite sont perpendiculaires à la ligne de terre au même point. Les droites n'étant plus dans ce cas déterminées par leurs projections, on ne peut plus rien conclure de positif d'après ces projections seules.



29. Corollaire. *Pour mener, par un point donné* o, o', *une parallèle à une droite donnée* ab, a'b', il suffit donc de mener par *o* et par *o'* des parallèles *cd*, *c'd'* à *ab* et à *a'b'*.

REPRÉSENTATION DES PLANS.

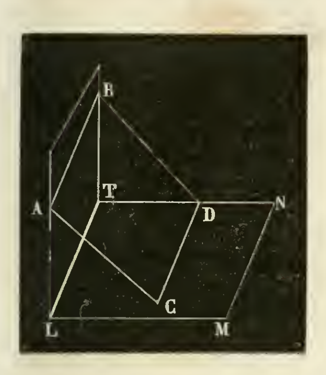
30. Un plan est déterminé, et *peut être représenté* par les projections de deux de ses droites parallèles ou non parallèles, ou par les projections d'une de ses droites et d'un de ses points situé hors de cette droite, ou enfin par trois de ses points non situés en ligne droite.



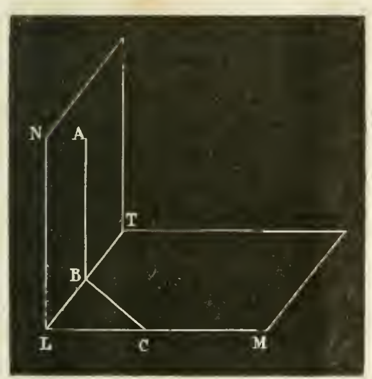
On représente souvent un plan par ses traces sur les deux plans de projection. Les *traces d'un plan* ABC sur les plans de projection sont ses intersections AB, BC avec ces deux plans.

Un plan peut rencontrer la ligne de terre en un point B; c'est

le cas général; ses deux traces AB, BC partent alors de ce même point B. Un plan peut être parallèle à la ligne de terre et rencontrer cependant les deux plans de projection; ses traces AB, CD sont alors parallèles à la ligne de terre. Enfin un plan peut être parallèle à l'un des plans de projection; alors il n'a qu'une trace sur l'autre plan de projection, et cette trace est parallèle à la ligne de terre. (V. la trace $a'b'$ du plan AB$a'b'$ sur la figure du n° 25.)



51. Théorème. *Lorsqu'un plan est perpendiculaire à un des plans de projection, sa trace sur l'autre est perpendiculaire à la ligne de terre.*

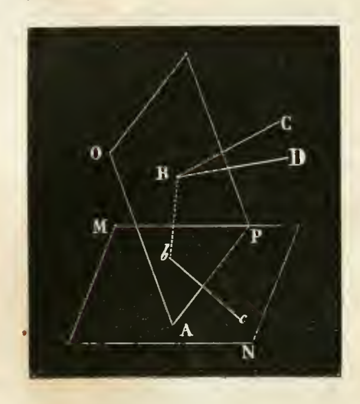


Soit, par exemple, le plan ABC perpendiculaire au plan horizontal; sa trace *verticale* AB est perpendiculaire à la ligne de terre. En effet, le plan ABC et le plan vertical TN étant tous deux perpendiculaires au plan horizontal TM, l'intersection AB de ces deux plans est perpendiculaire au plan horizontal, et par suite à la ligne de terre LT qui passe par son pied dans ce plan.

52. Remarque. Quand un plan ABC est perpendiculaire au plan horizontal, toute ligne droite ou courbe, toute figure située dans ce plan se projette horizontalement sur la trace BC. En effet, toutes les perpendiculaires au plan horizontal qui projettent les points de cette ligne ou de cette figure ne sortent pas du plan ABC, et ont leurs pieds sur BC (Géom., n° 266). De même, quand un plan est perpendiculaire au plan vertical, une ligne ou une figure quel-

conque située dans ce plan a sa projection verticale sur la trace verticale de ce plan.

53. Théorème. *Quand un plan* OP *et une droite* BC *sont perpendiculaires entre eux, la projection* bc *de la droite et la trace* AP *du plan sur le même plan* MN *sont perpendiculaires entre elles.*

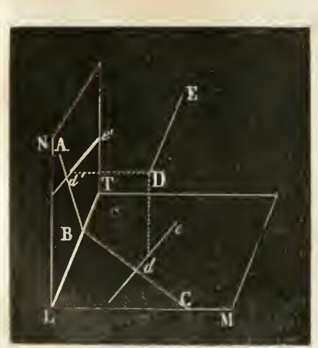


Abaissons du point B une perpendiculaire B*b* à MN; le plan CB*cb* coupe le plan MN suivant la droite *bc*, projection de BC. Ce plan AB*bc* est perpendiculaire au plan OP à cause de BC, et au plan MN à cause de B*b* (Géom., n° 264); il est donc perpendiculaire à l'intersection AP de ces deux plans. AP perpendiculaire au plan BC*bc* est perpendiculaire à la droite *bc* qui passe par son pied dans ce plan. C. Q. F. D.

La réciproque n'est pas vraie : *si la trace* AP *d'un plan* OP *et la projection* bc *d'une droite sur un plan* MN *sont perpendiculaires, le plan et la droite ne sont pas nécessairement perpendiculaires.*

En effet, admettons que la droite BC, dont la projection est *bc*, soit perpendiculaire au plan OP. Considérons une autre droite quelconque BD, menée par le point B dans le plan CB*bc*; cette droite BD, qui a aussi pour projection *bc* perpendiculaire à AP, n'est pas perpendiculaire au plan OP.

54. Mais *si les deux traces* BC, AB, *d'un plan* ABC, *et les deux projections* ed, e'd', *d'une droite* ED, *déterminée par ses projections, sont respectivement perpendiculaires, le plan* ABC, *et la droite* ED *sont nécessairement perpendiculaires l'un à l'autre.*



En effet, considérons un point quelconque D de ED projeté en *d* et en *d'*. Par ce point D il passe une perpendiculaire au plan ABC, dont la projection horizontale passe par

d, et doit être perpendiculaire à *bc* d'après la proposition précédente; cette projection horizontale n'est donc autre que *de*. On voit de même que la projection verticale de cette perpendiculaire n'est autre que $d'e'$. Cette perpendiculaire ayant les mêmes projections que ED, qui est déterminée par ses projections, n'est autre que ED; notre proposition est donc démontrée.

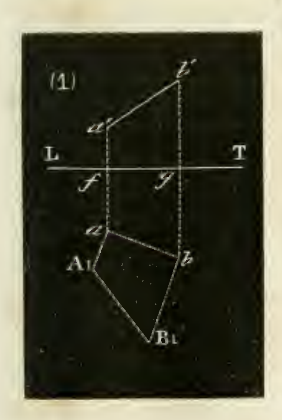
La seule exception a lieu quand la droite n'est pas déterminée par ces deux projections perpendiculaires à la ligne de terre au même point (n° 22). La même exception se produit naturellement dans tous les cas semblables.

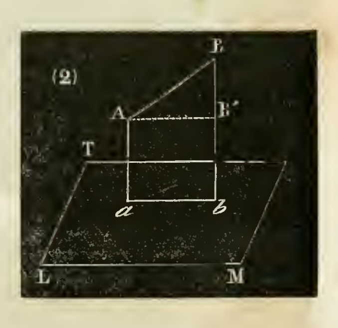
PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE.

35. Problème. *Déterminer la longueur d'une droite connaissant les projections* (a, a'), (b, b'), *de ses extrémités.*

Autrement dit : *Déterminer la distance de deux points* A *et* B *donnés par leurs projections* (a, a'), (b, b').

D'après ce qui a été dit précédemment, le point A se trouve sur une verticale $aA = a'f$, et B sur une verticale $bB = b'g$ (n° 8).



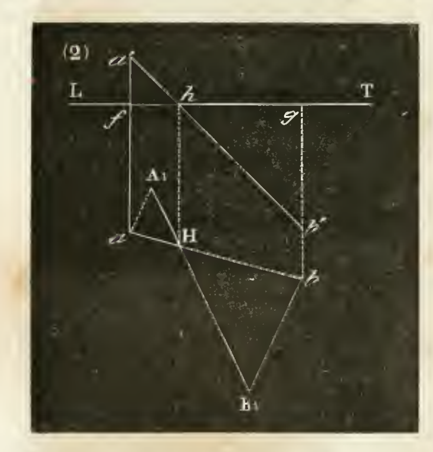


En se figurant ces verticales et la droite AB (fig. 2), on voit dans l'espace un trapèze *ab*AB rectangle en *a* et en *b*, et dont nous connaissons les trois côtés *ab*, *a*A et *b*B; nous pouvons construire ce trapèze sur l'épure. Pour cela, élevons sur *ab* deux perpendiculaires $aA_1 = a'f$, $bB_1 = b'g$, et traçons A_1B_1. Le trapèze

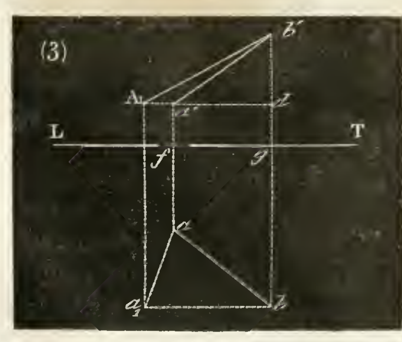
abB_1A_1 est égal au trapèze $abBA$ de l'espace; c'est le rabattement de ce trapèze qui aurait tourné autour de son côté ab. A_1B_1 est donc égal à AB; c'est la longueur ou la distance cherchée.

36. Remarque. Il peut arriver que les deux points A et B soient situés de côtés différents du plan horizontal.

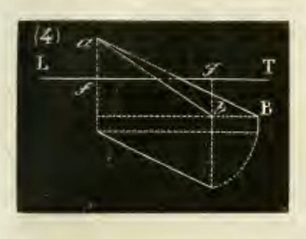
Un point projeté est au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, suivant que sa projection verticale est au-dessus ou au-dessous de la ligne de terre (V. le n° 16). Dans le second cas, la droite AB traverse sa projection horizontale et, au lieu d'un trapèze, nous avons deux triangles rectangles opposés par un sommet H (fig. 1). On mène sur l'épure les deux perpendiculaires aA_1, bB_1 de côtés différents de la ligne ab (fig. 2); on prend toujours $aA_1 = a'f$ et $bB_1 = b'g$. On reproduit ainsi la figure $AabB$ de l'espace, et $A_1B_1 = AB$.



37. Autre construction. En considérant le trapèze $ABab$ (fig. 2, n° 35), et menant par le point le plus bas A une parallèle AB′ à ab, on forme un triangle ABB′ rectangle en B′, dont on connaît deux côtés AB′ $= ab$ et BB′ $= Bb - Aa = b'g - a'f$. Il est facile de construire sur l'épure un triangle égal à ABB′; pour cela, on mène par a' (fig. 3)



une parallèle à la ligne de terre ; ce qui détermine la ligne $b'd = b'g - a'f = BB'$; l'angle d est droit. Pour achever, on mène par b une parallèle à la ligne de terre ; on prend sur cette ligne $ba_1 = ba$ (au moyen d'un arc de cercle), et on mène a_1A_1 perpendiculaire à la ligne de terre ; $dA_1 = ba_1 = ba$. On trace $b'A_1$; le triangle $b'dA_1$ est égal au triangle BB'A de l'espace, et $b'A_1$ est la longueur cherchée ; $b'A = AB$.



La même construction réussit sans modification dans le cas particulier signalé dans la remarque précédente. (*V.* la fig. 4.)

38. Remarque. Une droite AB de l'espace est généralement plus grande que sa projection ab sur un plan : en effet, $ab = AB'$, et on voit que AB est plus grande que AB' (fig. 2, n° 35). Quand la droite est parallèle au plan de projection, la figure ABba est un rectangle, et $AB = ab$.

39. Un polygone se projette évidemment en véritable grandeur quand il est situé dans un plan parallèle au plan de projection. Il en est de même de toute figure plane ainsi située ; la projection est une figure égale à la figure projetée.

40. Nous nous sommes fondé sur la possibilité de résoudre le problème précédent, pour montrer que la figure d'un corps ou en général une figure quelconque de l'espace, peut être construite à l'aide de sa projection verticale et de sa projection horizontale (n° 10). Il nous faut faire, dès à présent, une remarque importante à propos de cette construction.

41. Échelle de réduction. L'épure d'un instrument, d'une machine, d'un bâtiment, et en général d'une figure qui doit être construite à l'aide de cette épure dans les dimensions déterminées, est accompagnée de l'indication d'une échelle de réduction. Il est dit, par exemple, que l'échelle de réduction est $\frac{1}{100}$, ou un centimètre pour mètre. C'est que souvent, faute de place sur le papier, les projections données ne sont pas celles de la figure de l'espace

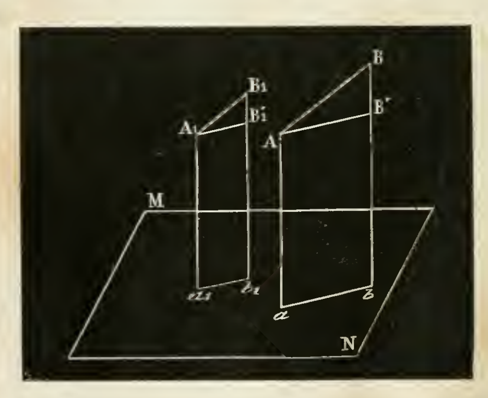
en véritable grandeur, mais celle d'une figure plus petite, *semblable et semblablement placée.*

On appelle *échelle de réduction*, le rapport constant d'une ligne de la figure *réduite* à son homologue de la figure *exacte*. Ce rapport est ordinairement une fraction telle que celles-ci : $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, etc. ; le dénominateur a généralement pour facteurs premiers 2 et 5.

42. L'échelle est souvent représentée géométriquement par une droite divisée que l'on trace sur la feuille d'épure. On indique sur cette droite la longueur réduite qui doit représenter ou 1 décimètre, ou 1 mètre, ou 10 mètres, ou 100 mètres, etc. (V., pour plus de détails, le même sujet dans les leçons sur le levé des plans.)

43. L'échelle de réduction est identiquement la même pour la projection que pour la figure projetée.

En effet, chaque ligne A_1B_1 de la figure réduite et son homologue AB de la figure exacte étant parallèles, il en est de même de leurs projections a_1b_1, ab sur le même plan. Menons $A_1B'_1$ et AB



parallèles à a_1b_1 et à ab. Les triangles $A_1B_1B'_1$, ABB' sont équiangles et semblables ; on a donc

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1B'_1}{A'B} = \frac{a_1b_1}{ab}.$$

Ce qui démontre notre proposition ; car $\frac{a_1b_1}{ab}$ est précisément l'échelle de réduction de la projection.

44. Connaissant l'échelle de réduction on peut, à mesure qu'on trouve les lignes A_1B_1, B_1C_1,... de la figure réduite, leur restituer leurs véritables grandeurs pour la construction de la figure exacte.

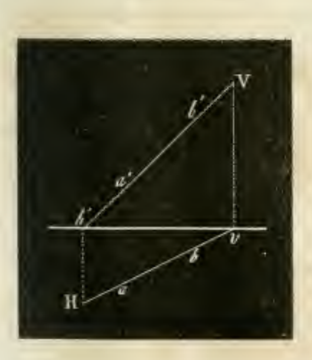
45. Notre figure montre aussi que les grandeurs et la position d'une ligne A_1B_1 de l'espace ne dépendent pas précisément des hauteurs A_1a_1, B_1b_1, mais de la différence $B_1b_1 - A_1a_1 = B_1B'_1$. Au lieu du trapèze $A_1B_1b_1a_1$ on peut, comme nous l'avons vu, construire simplement le triangle rectangle $A_1B_1B'_1$. Cela tient à ce que les projections de la même figure sur des plans parallèles étant évidemment les mêmes, on peut déplacer le plan de projection parallèlement à sa première position.

46. Il faut toujours indiquer une échelle quand il s'agit d'une application usuelle, s'il y a eu réduction de la figure. Nous n'avons pas besoin évidemment d'en indiquer dans l'exposition des méthodes générales de construction. Nous n'avons à le faire que pour les applications usuelles. (V. les épures d'instruments, de machines, ou de bâtiments; *plans, coupes, élévations.*)

47. Problème. *Trouver les traces d'une droite* ab, a'b'.

On appelle *traces d'une droite* les points où elle rencontre les plans de projection.

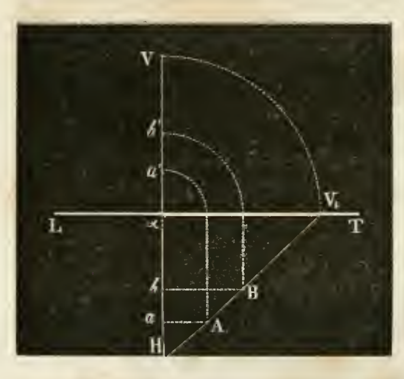
Pour trouver la trace horizontale d'une droite, on prolonge sa projection verticale jusqu'à la ligne de terre en *h'*; au point *h'* on élève une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à la rencontre de la projection horizontale de la droite en H; H est la trace horizontale cherchée. On obtient de même la trace verticale en prolongeant la projection horizontale jusqu'à la ligne de terre en *v*, puis élevant la perpendiculaire *v*V à la rencontre de la projection verticale en V; V est la trace verticale.



En effet, le point H du plan horizontal qui a pour projection verticale h' est sur la droite, puisque ses deux projections H et h' sont sur les projections de la droite ; le point H est donc le point où la droite rencontre le plan horizontal. On prouve de même que le point V du plan vertical est la trace verticale de la droite.

Il peut arriver que l'une des projections de la droite soit parallèle à la ligne de terre, la projection horizontale par exemple. Alors la droite projetée est parallèle au plan vertical ; elle n'a qu'une trace horizontale qui se détermine suivant la même règle.

48. La construction précédente ne réussit pas quand les projections de la droite sont perpendiculaires à la ligne de terre au même point α et par suite, confondues sur l'épure. La droite est déterminée par les projections $(a,\ a')$, $(b,\ b')$ de deux de ses points A et B ; elle est située dans un plan $a\alpha b'$ qui coupe les deux plans de projection suivant les droites αa, et $\alpha b'$ perpendiculaires entre elles et perpendiculaires à la ligne de terre. On résout ordinairement les questions proposées sur une figure située dans un pareil plan en rabattant ce plan et la figure sur le plan horizontal, comme nous allons le faire.



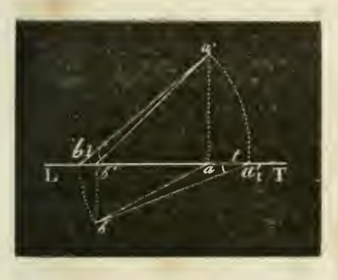
Mais auparavant, imaginons les verticales aA et bB ; elles sont dans le plan $a\alpha b'$, et y forment avec ab et AB un trapèze abBA rectangle en a et en b ; AB prolongée dans les deux sens va rencontrer d'une part αa en un point H qui est la trace horizontale cherchée, et $\alpha b'$ en un point V qui est la trace verticale ; il y a alors dans le plan $a\alpha b'$ un triangle VαH sur lequel se trouve le trapèze abBA. Imaginons que le plan $a\alpha b'$ tourne autour de $a\alpha$ pour se rabattre sur le plan horizontal ; la figure en question se rabat telle qu'elle est, et son rabattement est facile à construire. Pour cela, élevons sur $a\alpha$ au point a une perpendiculaire $a\text{A} = \alpha a'$, et $b\text{B} = \alpha b'$, et tirons la droite AB, nous avons le rabattement du trapèze. Prolongeons AB jusqu'à ce qu'elle rencontre αa en H et αT en V_1 ; nous avons le rabattement du triangle VαH.

Imaginons maintenant que ce triangle se relève en tournant autour de αH pour redevenir perpendiculaire au plan horizontal ; le point H ne bouge pas, et le point V_1 décrivant un arc de cercle autour de α, vient se placer en V sur αa ; H et V sont évidemment les traces cherchées sur l'épure.

49. Problème. *Construire les angles d'une droite* ab, a'b' *avec les*

plans de projection, c'est-à-dire *les angles que fait cette droite avec sa projection horizontale d'une part et sa projection verticale de l'autre.*

On détermine d'abord les traces a' et b de cette droite. Figurons-nous cette ligne $a'b$ dans l'espace; les angles à construire sont $a'ba$ et $ba'b'$. Le premier appartient au triangle $a'ab$ rectangle en a, et dont nous avons sur l'épure les côtés $a'a$ et ab; nous pouvons construire ce triangle. Pour cela, prenons sur la ligne de terre $ab_1 = ab$, au moyen d'un arc de cercle bb_1 décrit avec le rayon ab, et traçons la droite $a'b_1$. Le triangle $a'ab_1$ ainsi construit est égal au triangle $a'ab$ de l'espace (c'est le rabattement de ce triangle qui aurait tourné autour de son côté $a'a$); l'angle $a'b_1b = a'ba$ est l'angle cherché de la droite avec le plan horizontal. L'angle $ba'b'$ (de la droite $a'b$ avec le plan vertical) appartient aussi à un triangle $bb'a'$, rectangle en b', donc on connaît les côtés bb' et $b'a'$ de l'angle droit. Pour construire un triangle égal sur l'épure, on prend sur la ligne de terre $b'a'_1 = b'a'$ au moyen d'un arc de cercle $a'a'_1$, puis on joint ba'_1. Le triangle $bb'a'_1$ est égal au triangle $bb'a'$ (c'est le rabattement sur le plan horizontal de ce triangle qui aurait tourné autour de son côté bb'); l'angle $ba'_1b' = ba'b'$ est l'angle cherché du plan avec le plan vertical. Si les traces de la droite donnée ne se trouvaient pas sur l'épure, on prendrait un point (m, m') assez rapproché de la ligne de terre; on mènerait par ce point une parallèle $mn, m'n'$ à $ab, a'b'$ (n° 29), et on construirait les angles de cette parallèle avec les plans de projection.



Méthode des rabattements.

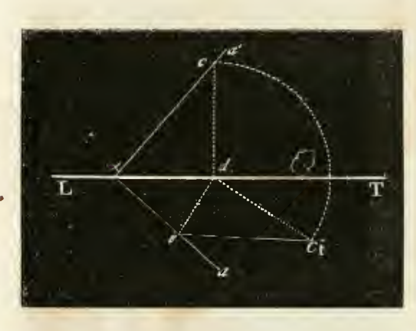
50. Avant de traiter les autres questions du programme, nous croyons devoir indiquer un mode de construction très-utile et souvent employé: c'est la *méthode des rabattements.* Une question est proposée sur une figure située dans un plan donné; on rabat cette figure sur le plan horizontal en faisant tourner le plan qui la contient autour de sa trace horizontale; puis on résout la question proposée sur le rabattement par les méthodes de la géométrie

plane. Enfin on relève les lignes ou les points trouvés dans cette construction; c'est-à-dire qu'on construit leurs projections en supposant la figure complétée ramenée à sa première position dans l'espace.

Pour appliquer la méthode des rabattements il suffit de savoir résoudre les trois problèmes suivants.

51. Problème. *Construire l'angle d'un plan donné* $a'\alpha a$ *avec le plan horizontal.*

Pour cela, élevons en un point quelconque e de la trace horizontale αa une perpendiculaire ed à cette ligne, et au point d une perpendiculaire dc à la ligne de terre; dc est perpendiculaire au plan horizontal (Géom., n° 265). Figurons-nous la ligne ce de l'espace; cette ligne située dans le plan donné est perpendiculaire à $a\alpha$ d'après le théorème des trois perpendiculaires (Géom., n° 241); l'angle ced mesure donc l'angle du plan $a'\alpha a$ et du plan horizontal; c'est l'angle à construire. Or cet angle ced appartient au triangle cde rectangle en d, dont nous connaissons les côtés cd et de de l'angle droit; nous pouvons construire ce triangle sur l'épure. Pour cela menons par le point d une perpendiculaire dc_1 à de et prenons $dc_1 = dc$, puis joignons ec_1; le triangle c_1de est égal au triangle cde; c'est le rabattement de ce triangle qui aurait tourné autour de son côté de; l'angle c_1ed est donc égal à l'angle ced; c'est l'angle demandé du plan $a'\alpha a$ avec le plan horizontal.



On construit de la même manière l'angle du plan $a'\alpha a$ avec le plan vertical. En un point e' pris sur la trace verticale on mène $e'd'$ perpendiculaire à cette trace; puis, au point d' une perpendiculaire $d'c'$ à la ligne de terre; le triangle $c'd'e'$ est analogue au triangle cde; et on le rabat de même sur le plan vertical. (Faites la figure.)

52. Définitions. Lorsqu'un plan $a'\alpha a$, tournant autour de sa trace αa comme charnière, se rabat sur le plan horizontal, chaque point

M de ce plan $a'\alpha a$ prend sur le plan horizontal une position déterminée M_1 qu'on appelle son rabattement.

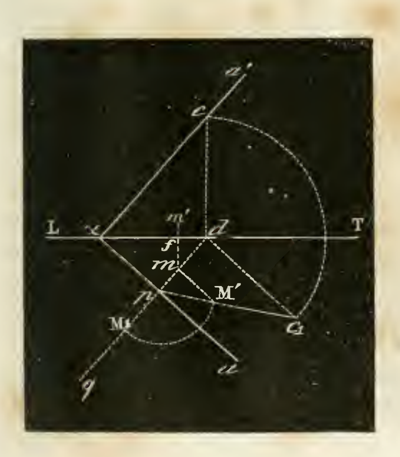
Rabattre un point, c'est trouver son rabattement. *Relever* un point c'est trouver ses projections, connaissant son rabattement. On résout aisément ces deux problèmes en se fondant sur cette proposition :

53. Théorème. *La projection horizontale* m *d'un point* M *du plan* $a'\alpha a$, *et son rabattement* M_1 *sur le plan horizontal, sont situés sur une même perpendiculaire* mpM_1 *à la trace horizontale* αa; mp, $Mp = pM_1$, *et la verticale* mM *forment au-dessus de* mp *un triangle* Mmp, *rectangle en* m, *et dont l'angle* Mpm *mesure l'angle du plan* $a'\alpha a$ *avec le plan horizontal.* (V. la fig. suiv.)

En effet, Mm étant perpendiculaire au plan horizontal, et mp perpendiculaire à αa, Mp est perpendiculaire à αa d'après le théorème des trois perpendiculaires (Géom., n° 241); l'angle Mpm mesure l'angle du plan $a'\alpha a$ avec le plan horizontal (Géom., n° 263). Quand le plan $a'\alpha a$ tourne autour de $a\alpha$, la ligne pM perpendiculaire à αa vient se rabattre sur le prolongement pq de mp, et le point M vient se placer sur pq en un point M_1 tel que $pM_1 = pM$. Notre proposition est donc démontrée.

54. Problème. *Rabattre sur le plan horizontal un point donné* M *d'un plan donné* $a'\alpha a$.

1er cas. *Les projections* m, m', *du point* M *sont données.*



On se fonde sur cette proposition : *la projection horizontale* m *d'un point* M *et son rabattement* M_1 *sont situés*, etc. (n° 53). D'après cette proposition, on abaisse mpq perpendiculaire sur αa; le rabattement M_1 est sur pq; il faut trouver pM_1. Pour cela, il suffit de construire un triangle égal au triangle Mmp de l'espace dont on connaît deux côtés, mp et $Mm = m'f$. On élève donc en m sur mp la perpen-

diculaire $mM' = m'f$, et on joint pM'; le triangle $M'mp$ est égal au triangle Mmp, et $pM' = pM = pM_1$. On prend sur pq une longueur $pM_1 = pM'$ en décrivant l'arc de cercle $M'M_1$; M_1 est le rabattement cherché.

2ᵉ cas. *On ne connaît que la projection horizontale* m.

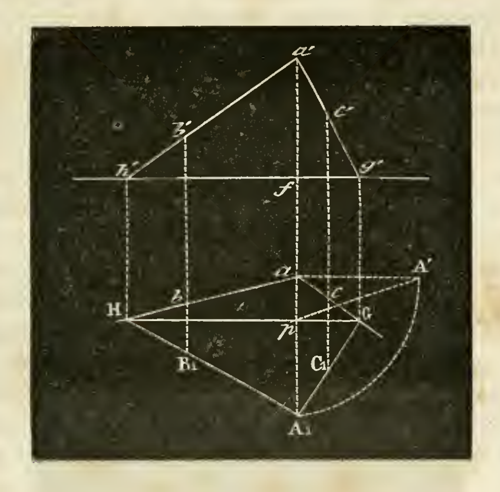
On pourrait construire la projection verticale; mais c'est inutile. On se fonde sur cette proposition : *la projection horizontale* m *du point* M *et son rabattement* M_1 *sont situés,* etc. (n° 53). D'après cette proposition, on abaisse mpq perpendiculaire à αa (fig. précéd.); le rabattement M_1 est sur pq; il faut trouver pM_1. Dans le triangle Mmp de l'espace nous ne connaissons que le côté mp; mais nous pouvons avoir l'angle Mpm en construisant l'angle du plan $a'\alpha a$ avec le plan horizontal comme il a été indiqué n° 51. On prolonge pm perpendiculaire à αa, jusqu'à la ligne de terre en d, et on élève dc perpendiculaire à LT; enfin on construit le triangle $pdc_1 = pdc$ de l'espace; l'angle $dpc_1 = dpc = Mpm$. Connaissant l'angle Mpm, on élève en m la perpendiculaire pM' jusqu'à pc_1; on a ainsi le triangle $M'mp = Mmp$, et $pM' = pM = pM_1$. On prend sur pq une longueur $pM_1 = pM'$, et le point M_1 est le rabattement cherché.

55. Problème inverse. *Relever un point* M *d'un plan donné* a'αa *connaissant son rabattement* M_1 *sur le plan horizontal.*

On se fonde sur cette proposition : *la projection horizontale* m, *et son rabattement* M_1 *sont situés*, etc. (n° 53, fig. précéd.). D'après cette proposition, on abaisse M_1pd perpendiculaire à αa; la projection horizontale m est sur pd; il faut trouver pm. Or, nous connaissons l'hypoténuse $pM = pM_1$ du triangle Mmp de l'espace, et nous pouvons construire son angle Mpm égal à l'angle du plan $a'\alpha a$ avec le plan horizontal, comme dans le problème précédent (2ᵉ cas). On prolonge la perpendiculaire M_1p jusqu'à la ligne de terre en d, etc. Ayant construit l'angle $dpc_1 = dpc = Mpm$, on prend sur pc_1 une longueur $pM' = pM_1$ et on abaisse $M'p$ perpendiculaire sur pd. Le triangle $M'mp$ est égal au triangle Mmp de l'espace; c'est le rabattement de ce triangle qui aurait tourné autour de son côté Mm; la projection horizontale m est donc trouvée en véritable position. Pour avoir la projection verticale, on remarque que $mM' = Mm$, hauteur de M au-dessus du plan horizontal. On élève donc mfm' perpendiculaire à LT, et on prend $fm' = mM'$; m' est la projection verticale cherchée.

56. Simplifications. Ces diverses constructions se simplifient dans les applications quand il y a un certain nombre de points à rabattre ou à relever. Dans ce cas, il est bon, en général, de construire tout exprès et isolément l'angle du plan donné *a'aa* avec le plan horizontal (n° 51); cet angle une fois construit se répète partout où l'on veut à l'aide de parallèles. Nous allons faire quelques applications pour indiquer des simplifications usuelles.

1re Application. *Construire l'angle de deux droites* (ab, a'b'), (ac, a'c').



On reconnaît sur une épure que deux droites projetées se rencontrent dans l'espace quand leurs projections verticales d'une part, et leurs projections horizontales de l'autre. se rencontrent sur une même perpendiculaire *a'a* à la ligne de terre (n° 13).

Pour construire l'angle de deux droites (*ab*, *a'b'*), (*ac*, *a'c'*), on détermine d'abord leurs traces horizontales (n° 47); soient H et G. La droite GH est la trace horizontale du plan de ces deux droites et l'angle à construire est l'angle GAH. Imaginons que ce plan tournant autour de GH se rabatte sur le plan horizontal; G et H sont fixes. Rabattons le point A en A_1 comme il a été expliqué n° 54, 1er cas; puis menons les droites A_1G, A_1H. L'angle GA_1H est l'angle GAH rabattu en véritable grandeur; le problème est donc résolu.

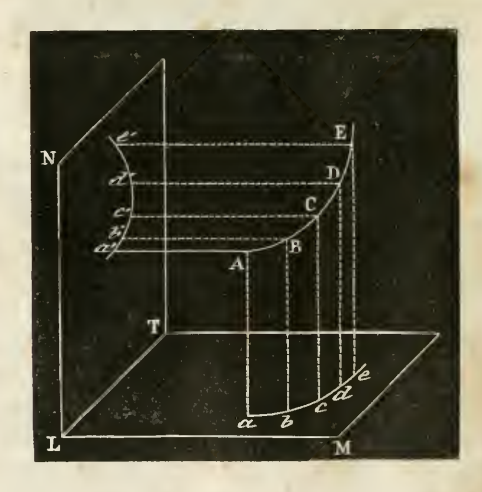
57. 2[e] APPLICATION. *Construire le triangle* ABC *déterminé par trois points donnés* (a, a′), (b, b′), (c, c′).

On mène *ab*, *a′b′*, *ac*, *a′c′*; puis on cherche les traces horizontales H et G de ces droites; la droite GH est la trace horizontale du plan déterminé par les points donnés A, B, C; on rabat ce plan. On fait le rabattement du point (*a*, *a′*) comme il a été expliqué n° 54, 1[er] cas; on mène HA_1, GA_1, puis les perpendiculaires bB_1, cC_1 à l'axe de rabattement GH. Les points B_1 et C_1 sont les rabattements de B et de C, et le triangle A_1 B_1 C_1 est le triangle ABC de l'espace rabattu en véritable grandeur.

En effet HA_1, GA_1 sont les rabattements des droites HBA, GCA, ou BA, CA; les rabattements de B et de C sont sur ces lignes; ces rabattements sont aussi sur les perpendiculaires bB_1, cC_1 à l'axe GH (n° 53); ces rabattements sont donc B_1 et C_1.

58. PROJECTION D'UNE COURBE. La projection *abcde* d'une courbe ABCDE sur un plan TM est la ligne que forment les projections des points de cette courbe.

La projection d'une courbe est généralement une courbe; c'est une ligne droite dans le seul cas où la courbe est entièrement située dans un plan perpendiculaire au plan de projection.



59. *Une courbe n'est pas déterminée par sa projection sur un seul plan* TM.

En effet les perpendiculaires *a*A, *b*B, *c*C... qui projettent les points A, B, C,... forment une surface continue perpendiculaire au plan TM, qu'on appelle le cylindre projetant la courbe ABCDE. Connaissant la projection *abcde* d'une certaine courbe sur un plan TM, on connaît son cylindre projetant *abcde*ABCDE; mais on ne peut distinguer cette ligne parmi toutes les lignes en nombre infini et de formes quelconques qui peuvent être tracées sur ce cylindre.

60. *Mais une courbe est généralement déterminée par sa projection horizontale* abcde, *et sa projection verticale* a'b'c'd'e'.

En effet, cette courbe situé sur deux cylindres connus *abcde*ABCDE, *a'b'c'd'e'*ABCDE, ne peut être que l'intersection ABCDE de ces deux cylindres.

61. On ne saurait donner de règle générale pour construire les projections d'une courbe; la marche à suivre dépend absolument des conditions qui déterminent cette ligne. Très-souvent on construit ces projections par points suffisamment rapprochés, qu'on joint ensuite par une ligne continue de manière que les éléments se raccordent convenablement. Quand on opère ainsi, il est bon de construire, s'il est possible, un certain nombre de droites tangentes à la projection en des points déterminés exactement; les éléments curvilignes tangents à des droites connues en des points donnés se tracent plus exactement.

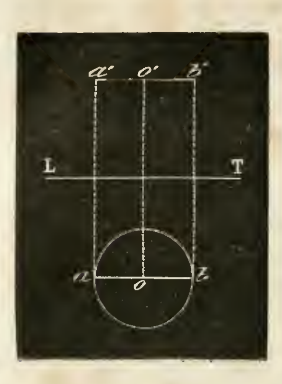
62. Quand la projection est une courbe d'un genre connu, déterminée par certains points et par certaines lignes principales qui peuvent servir à la construire exactement, on tâche de déterminer ces points et ces lignes sur l'épure; puis on s'en sert pour construire la projection cherchée.

63. Quand une courbe à projeter est plane, et telle que son rabattement peut être aisément et exactement construit, il est quelquefois commode et avantageux de construire ce rabattement pour en relever ensuite les différents points.

Nous allons à titre d'exemple nous occuper de la projection d'un cercle situé dans un plan donné quelconque.

64. Projections du cercle.

1er cas. *Le cercle est parallèle au plan horizontal.* Sa projection horizontale est un cercle égal au cercle donné (n° 39), et sa projection verticale se réduit à la projection verticale $a'o'b'$ du diamètre AOB parallèle au plan vertical.



65. 2e cas. *Le cercle est situé dans un plan donné quelconque* PQR.

1re Méthode. Supposons qu'on donne la projection horizontale o du centre, ou ses deux projections o, o', et le rayon. On rabat le centre en O_1 sur le plan horizontal (*fig.* 1 de la planche ci-après), comme il a été expliqué n° 54, et on décrit une circonférence de O_1 comme centre avec le rayon donné; puis on relève cette circonférence, point par point, comme il a été indiqué n° 55, en profitant de toutes les simplifications qui se présentent (*). C'est le cas de construire tout exprès l'angle du plan PQR avec le plan horizontal.

L'épure est facile à comprendre pour le lecteur qui sait rabattre et relever un point (nos 54 et 55). Nous laissons à construire la projection verticale: après avoir trouvé la projection horizontale m d'un point quelconque, on détermine sa projection verticale m' comme il est indiqué n° 55.

2e Méthode. Considérons le diamètre horizontal AOA_1 du cercle proposé, celui qui est parallèle à QR (*fig.* 2); ce diamètre a pour projection horizontale une ligne égale aoa_1 parallèle à QR (n° 38). Imaginons notre cercle projeté sur le plan horizontal qui passe par AOA_1, et que nous appellerons AA_1M'; cette projection et celle que nous cherchons sont égales et parallèles; si on sait construire

(*) Si l'on mène sur le rabattement un diamètre parallèle à QR et un autre perpendiculaire, il suffit de relever par la méthode ordinaire un des quadrants ainsi déterminés; chaque point de la projection de ce quadrant fait connaître trois points des projections des trois autres, symétriquement placés par rapport aux projections des deux diamètres en question. Ex. : le point m relevé, on trouve immédiatement m_1, m_2, 3_3.

la première en opérant sur AOA_1 dans le plan AA_1M', on obtiendra la seconde en faisant sur l'épure exactement les mêmes constructions sur aoa_1. Considérons donc un instant à part le cercle ABA_1 de l'espace et sa projection sur le plan horizontal AA_1M' (*fig.* 3). Abaissons sur ce plan la perpendiculaire Bb pour projeter le point b; menons bO perpendiculaire à AA_1 et tirons BO; BO est perpendiculaire à AA_1 (Th. des trois perp.); faisons la même construction pour un autre point quelconque N de la circonférence. On appelle *ordonnées* du cercle les perpendiculaires telles que BO, NQ, menées de la circonférence sur le même diamètre AOA_1; bO, nQ sont les ordonnées de la projection. Les triangles BbO, NnQ, qui ont les côtés parallèles, sont semblables, et donnent $\frac{NQ}{nQ}=\frac{BO}{bO}$; *le rapport d'une ordonnée du cercle à sa projection est donc le même pour toutes les ordonnées.* Cela posé, imaginons que le cercle $ANBA_1B_1$ tournant autour de AA_1 comme axe, se rabatte sur le plan AA_1M'; chaque ordonnée QN du cercle perpendiculaire à AA_1 se rabat sur sa projection Qn; la circonférence rabattue et sa projection forment la fig. 4, dans laquelle, suivant ce qui vient d'être démontré, la projection $AnbA_1b$ divise toutes les ordonnées du cercle dans le même rapport. Cette fig. 4, supposée construite *au-dessus de l'épure* dans le plan horizontal AA_1M', se projette comme nous l'avons dit en véritable grandeur sur notre plan horizontal de projection; il suffit donc de la reproduire sur l'épure, aoa_1 remplaçant AOA_1, pour avoir la projection horizontale du cercle.

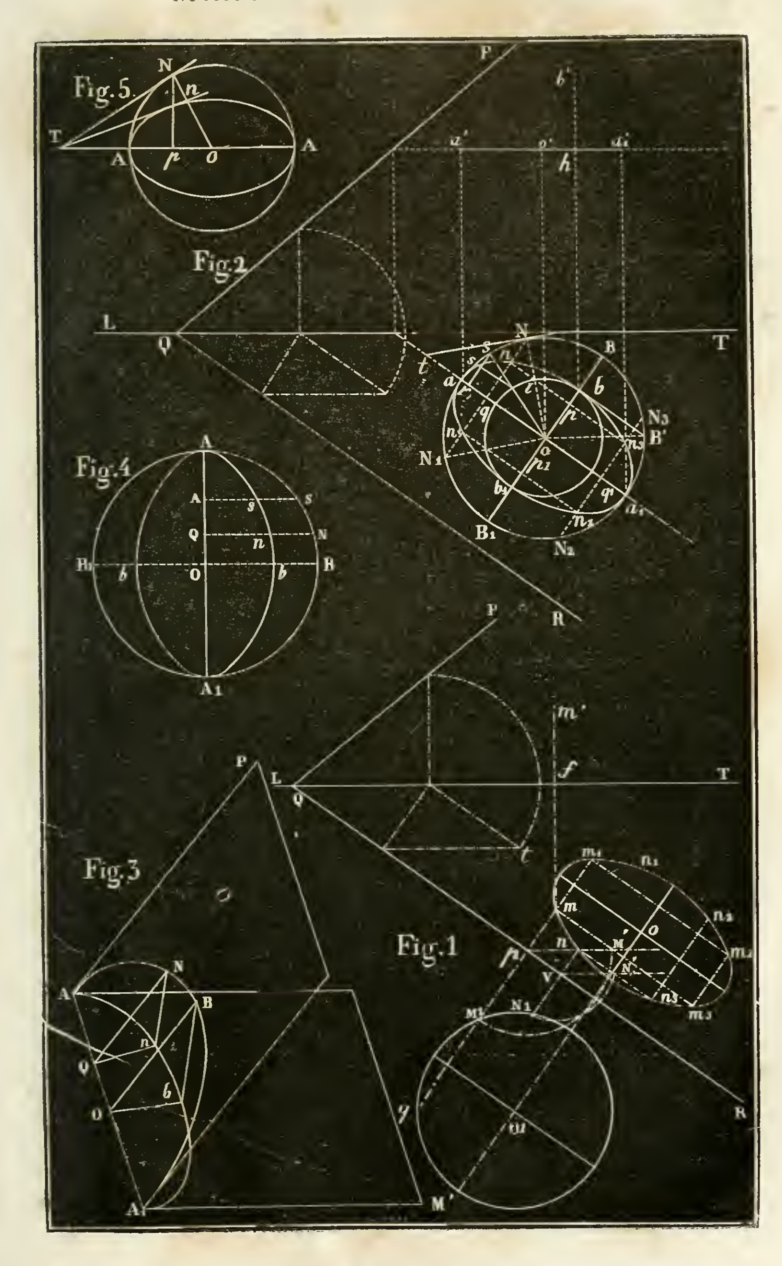
Construction. On décrit donc une circonférence sur aoa_1 comme diamètre (*fig.* 2); on élève au point o une perpendiculaire oB; au même puint o on fait avec oB un angle BoB' égal à l'angle du plan donné avec le plan horizontal, et on abaisse $B'b$ perpendiculaire sur oB. L'ordonnée oB du cercle est divisée en b dans le rapport convenable, et b est la projection du point B de l'espace; en effet, le triangle $B'ob$ est égal au triangle BOb de la fig. 3. Pour diviser une autre ordonnée Nq dans le même rapport, on tire oN et on prend $oi=ob$, en décrivant l'arc de cercle bi; par suite $iN=bB$. Enfin on mène in parallèle à aoa_1; le point n est la projection du point N de l'espace, puisque $\frac{Nq}{nq}=\frac{No}{io}=\frac{oB}{ob}$. La même construction devant se répéter pour toutes les ordonnées du cercle, on

prolonge l'arc bi jusqu'à oa, et on fait pour chacune de ces ordonnées, exemple Sr, ce que nous avons fait pour Nq. Quand on a projeté un nombre suffisant de points du quadrant ANB, on joint les projections trouvées $b...n...s...a$ par une ligne continue. Chaque point n de l'arc anb fournit trois autres points n_1, n_2, n_3, appartenant respectivement aux projections des trois autres quadrants, et qui s'obtiennent comme il est indiqué sur l'épure ($qn_1 = qn$; $pn_3 = pn$ et $p_1n_2 = p_1n_1$). La raison de cette construction se voit facilement; il y a sur le cercle aBa_1B_1 quatre ordonnées égales Nq, qN_1, N_2q_1, q_1N_3, auxquelles correspondent quatre ordonnées égales nq, qn_1, q_1n_2, n_3q_1 de la projection, puisqu'on doit avoir $\frac{Nq}{nq} = \frac{qN_1}{qn_1} = \frac{N_2q_1}{n_2q_1} = \frac{q_1N_3}{q_1n_3}$.

Pour avoir la projection verticale de la circonférence, le plus simple est de faire sur le plan vertical ce qu'on a fait sur le plan horizontal, en opérant sur une parallèle à la trace verticale PQ comme on a opéré sur aoa_1, et en employant l'angle du plan PQR avec le plan vertical comme on a employé son angle avec le plan horizontal. La seconde projection obtenue, on trouve facilement les points correspondants au moyen de perpendiculaires à la ligne de terre, exemple: bb'. *Autrement:* ayant obtenu la projection horizontale b d'un point B, on mène bb' perpendiculaire à LT, et on prend au-dessus de $a'o'a'_1$ une longueur hb' égale à bB' du triangle boB'; bB' est évidemment la hauteur du point B de l'espace au-dessus du plan horizontal AA_1M' qui a pour trace verticale $a'o'a'_1$, puisque $bB' = bB$ de la fig. 3 (*). On fait de même pour les autres points.

66. Chaque projection du cercle est une courbe appelée ELLIPSE. Cette courbe a un centre qui est la projection o du centre du cercle; en effet, chaque diamètre du cercle étant divisé au point O en deux parties égales, sa projection est divisée de même au point o.

(*) Ayant trouvé la projection verticale n' d'un point N du premier quadrant on mène par ce point des parallèles aux projections verticales $a'o'a'_1$ et $b'o'b'_1$, de AOA_1 et de BOB_1 préalablement déterminées, et l'on achève le parallélogramme $n'n'_1n'_2n'_3$ dont les côtés doivent être respectivement divisés par $a'o'a'_1$, et $b'o'b'_1$ en deux parties égales. On obtient ainsi les projections verticales des quatre points N, N_1, N_2, N_3.


Fig. 5.
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 3
Fig. 1

L'ellipse a deux axes rectangulaires aoa_1, bob_1, dont l'un est parallèle à la trace QR; c'est ce qui résulte de notre construction et de nos explications. La plus grande ordonnée du cercle est celle qui tombe au centre, c'est-à-dire BO projetée en *bo*; *bo* est donc la plus grande des ordonnées de l'ellipse. Le diamètre horizontal AOA_1 du cercle est le seul qui se projette en véritable grandeur (nº 38); tous les autres sont diminués; aoa_1 est donc le plus grand diamètre et même la plus grande corde de l'ellipse. Le grand axe aoa_1 de l'ellipse (V. les courbes usuelles) est donc la projection en véritable grandeur du diamètre AOA_1 du cercle parallèle au plan de projection, et le petit axe bob_1 la projection du diamètre BOB_1 perpendiculaire au premier. Nous pourrions indiquer ici d'autres propriétés intéressantes de l'ellipse, qui se déduisent de la proposition relative aux ordonnées du cercle et de l'ellipse; mais nous nous écarterions peut-être un peu trop de notre but actuel.

67. *Construire une tangente à l'ellipse en un de ses points* n. On mène une tangente N*t* à la circonférence au point N correspondant à *n*, jusqu'à la rencontre de aoa_1, en *t*; on joint *tn*; cette ligne est la tangente cherchée. En effet, on répète ainsi ce qui se ferait sur le plan horizontal supérieur AA_1M' déjà considéré, et que nous indiquons sur la fig. 5. La tangente à l'ellipse en *n* est la projection de la tangente au point correspondant N de la circonférence; or celle-ci a pour trace sur le plan AA_1M' un point T, qui est lui-même sa projection sur ce plan; donc T*n* (que nous avons répétée en *tn*) est la projection de TN sur le plan AA_1M'. Pour avoir la projection verticale de la tangente, on projette *t* en *t'* sur $a'o'a'_1$, et on tire *t'n'*. (Complétez la fig.)

68. Problème. *Faire passer une circonférence par trois points donnés* (a, a'), (b, b'), (c, c'). On rabat ces trois points sur le plan horizontal, comme il a été dit nº 54. On fait passer une circonférence par les trois rabattements A_1, B_1, C_1; puis ayant relevé le centre en *o*, *o'*, et le diamètre horizontal aoa_1, on construit les projections de la circonférence, comme il vient d'être indiqué.

REPRÉSENTATION DES FIGURES QUELCONQUES.

69. Préliminaires. Sachant représenter les points, les lignes, les plans, nous pouvons nous occuper de la représentation des corps

et des figures quelconques. Nous considérerons d'abord les figures géométriques vulgaires; puis nous nous occuperons des instruments, des machines, des édifices, et en général des ouvrages d'art et d'architecture.

Pour représenter un objet quelconque par la méthode des projections, on mesure d'abord sur la figure même à représenter les lignes et les angles qui la déterminent dans son ensemble et dans ses détails essentiels. Puis on se sert de ces longueurs, ordinairement réduites suivant une certaine échelle, pour construire une épure sur laquelle doivent être représentées toutes les lignes nécessaires pour une description suffisante de l'objet en question.

70. Les longueurs se mesurent, suivant leur étendue, avec un double décimètre ou un mètre divisé, avec la roulette, et au besoin avec la chaîne d'arpenteur (levé des plans). Les hauteurs verticales se déterminent autant que possible avec le fil à plomb, et quelquefois à l'aide de mesures indirectes et d'un rabattement, comme nous l'indiquons plus loin à propos des pyramides et des polyèdres.

71. Chaque angle se mesure avec le rapporteur quand cela est possible, et souvent comme il suit : on mesure sur les côtés deux petites longueurs AB, AC, puis la distance opposée BC (en se servant au besoin d'un compas d'épaisseur); on construit un triangle avec ces trois longueurs, et l'angle BAC est connu (V. le levé des plans pour la mesure des angles sur une grande étendue).

72. On a souvent à représenter une circonférence tracée sur un corps rond. On mesure son contour et on en déduit le rayon ; ou bien on détermine, en se servant au besoin d'un compas d'épaisseur, les distances rectilignes de trois points de la courbe; on construit un triangle avec ces trois longueurs et on circonscrit une circonférence à ce triangle.

73. Il arrive souvent que l'objet à représenter n'existe pas; il s'agit d'un instrument, d'une machine, d'un ouvrage quelconque d'art ou d'architecture qui doit être construit d'après le dessin. Dans ce cas, les longueurs et les angles que l'on mesurerait si l'objet existait sont donnés avec toutes les autres indications nécessaires par l'auteur du projet, et l'épure se construit exactement dans les mêmes conditions et de la même manière.

74. Des cotes. Pour plus de clarté et de commodité, on inscrit souvent sur les dessins géométriques des nombres indiquant les vraies valeurs des lignes et des angles; ces nombres s'appellent des *cotes*. Les longueurs et les angles cotés doivent être distinctement indiqués. (V. plus loin les plans d'une maison.)

75. Échelles. Les longueurs cotées ou non sont ordinairement réduites suivant une certaine échelle (V. le n° 18 et le levé des plans). L'échelle doit être indiquée sur la feuille de dessin soit par un nombre, soit par une ligne divisée.

Nous n'avons écrit de cotes ou indiqué une échelle que sur les figures d'instruments ou de bâtiment. Quant aux figures géométriques ordinaires, nous avons cru inutile de le faire; les lignes qui doivent être cotées (celles qui déterminent la figure) se voient aisément, et le lecteur peut les coter lui-même en les mesurant et en adoptant une échelle de réduction.

76. Choix des plans de projection. Les plans de projection rectangulaires entre eux *sont d'ailleurs tout à fait arbitraires;* on les choisit, après examen de la figure à représenter, le plus avantageusement possible pour la clarté et la simplicité de l'épure. Il importe évidemment que les lignes principales, les détails essentiels de la figure se trouvent immédiatement, se voient sur le dessin, ou puissent s'en déduire aisément. C'est pourquoi on projette ordinairement la figure sur des plans qui contiennent des faces ou des lignes principales, ou sur des plans parallèles. Exemple : un cube, un parallélipipède rectangle, un prisme droit, une pyramide, un cône, un cylindre; on prend, *autant que possible*, le plan de la base pour plan horizontal. Pour les trois premières figures, on prend le plan vertical parallèle à une des faces latérales; pour le cylindre oblique, on le prend parallèle aux génératrices. Quand on ne peut pas prendre le plan de projection parallèle au plan d'une ligne principale, il y a avantage à le choisir perpendiculaire à ce plan; la ligne en question se projette alors simplement (n° 32). et surtout se construit aisément en vraie grandeur à l'aide d'un rabattement.

Quand la figure proposée est complexe, les plans de projection, choisis avantageusement pour la représentation de certaines faces ou de certaines lignes, ont une position obligée par rapport aux autres faces ou aux autres lignes de la figure. De là certaines diffi-

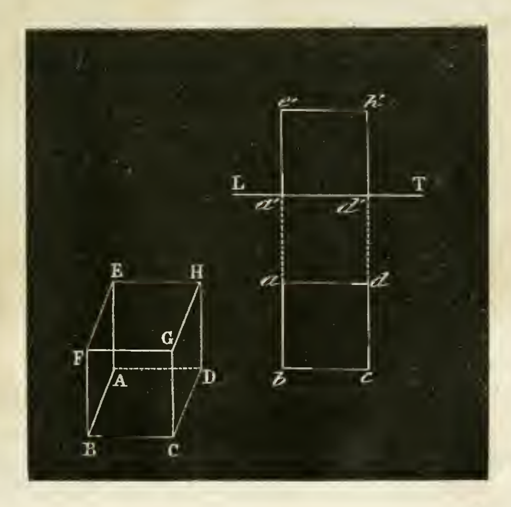
cultés de constructions que l'on prévoit dans la géométrie descriptive en apprenant à projeter des figures ayant une position déterminée quelconque par rapport aux plans de projection.

Mais nous le répétons, et c'est ce que nous avons voulu mettre en évidence, le dessinateur doit s'attacher à éviter les complications, *à représenter d'une manière aussi simple, aussi nette, aussi claire que possible, toutes les parties essentielles de la figure proposée :* or le meilleur moyen d'arriver à ce but est un choix judicieux des plans de projection.

77. Quand l'objet à représenter est tel que toutes ses parties essentielles, utiles à connaître, ne peuvent pas être représentées *distinctement* sur la même épure, on considère séparément ces diverses parties, et on en fait des projections distinctes sur plusieurs plans horizontaux ou verticaux convenablement choisis (dans les conditions précédemment indiquées). La correspondance de ces diverses projections s'établit aisément. On verra, à propos des édifices, des instruments et des machines, des exemples de cette décomposition de l'objet représenté (V. *plans, élévations*, et *coupes.*)

PROJECTIONS D'UN CUBE.

78. 1er CAS. Le plus simple est de prendre le plan de la base pour plan horizontal, et le plan vertical parallèle à une autre face

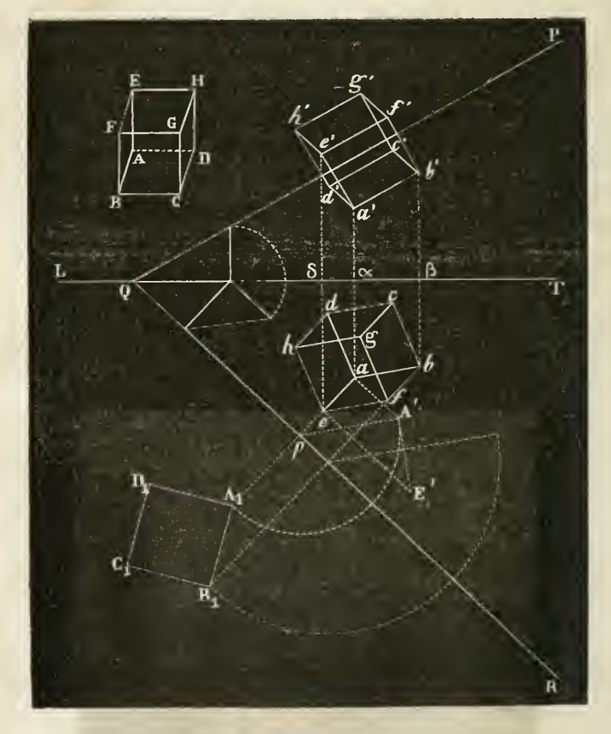


ADHE. Ayant mesuré l'arète du cube, on trace une ligne égale *ad*, parallèle à la ligne de terre, et on achève la base *adcb*. On projette cette base en *a'd'* sur LT, puis on prend *a'e'*, *d'h'*, égales à *ad*, et on trace *e'h'*. Le cube est projeté horizontalement sur *abcd*, verticalement sur *a'd'h'e'*.

79. 2ᵉ CAS. *La base* ABCD *est située dans un plan quelconque.*

(Changez l'ordre des lettres du petit cube isolé à gauche; au lieu de B, C, D, A, F, G, H, E, mettez A, B, C, D, E, F, G, H).

Le plan de la base étant donné, il suffit de connaître le côté AB du cube, et la position précise de ce côté relativement à la trace



QR du plan donné. Ayant pris toutes les mesures nécessaires, on trace sur le rabattement le côté $A_1B_1 = AB$ dans la position indiquée de AB par rapport à QR. On achève le carré $A_1B_1C_1D_1$, et on le relève en *abcd*. Cela fait, on construit la projection horizontale de l'arète AE : cette arète, issue du point A et perpendiculaire au

plan PQR de la base, est située dans le plan *pa*A qui est perpendiculaire à QR (n° 51) et par suite au plan PQR et au plan horizontal (Géom., n° 267); AE est donc perpendiculaire à la droite A*p* qui passe par son pied dans le plan PQR; de plus la verticale E*e* qui projette le point E est dans le plan *ap*AE, et sa projection *e* est sur la trace *pa*. Pour trouver ce point *e*, rabattons le plan *ap*AE en le faisant tourner autour de *pa*; le triangle *ap*A prend la position connue *ap*A′ (n° 51); menons A′E′ perpendiculaire à *p*A′; prenons $A'E' = A_1B_1$ et abaissons E′*e* perpendiculaire à *ap*; nous avons ainsi les rabattements des lignes AE, E*e*. Comme la projection *e* est sur la charnière, elle n'a pas bougé dans le rabattement, et nous la connaissons en véritable position.

Nous connaissons les projections horizontales de trois arêtes adjacentes *ab*, *ad*, *ae* du cube; il est facile d'achever. (V. le petit cube.) Les côtés EF, FG,... de la base supérieure étant respectivement égaux et parallèles à AB, BC, etc., et le point *e* correspondant au point *a*, on mène *ef* égale et parallèle à *ab*, puis *fg* égale et parallèle à *bc*, et on achève le parallélogramme *efgh* qui est la projection horizontale de la base supérieure EFGH du cube. On joint ensuite les sommets correspondants (*a*, *e*), (*b*, *f*), (*c*, *g*), (*d*, *h*); cela fait, on a la projection horizontale *abcdefgh* du cube.

Pour obtenir la projection verticale on mène d'abord les perpendiculaires *aαa′*, *bβb′*, *eεe′*,... à la ligne de terre, et on prend $\alpha a' = a\mathrm{A}'$, $\mathrm{B}b' = b\mathrm{B}'$, $\varepsilon e' = e\mathrm{E}'$, etc. (puisque $a\mathrm{A}' = a\mathrm{A}$ hauteur de A au-dessus du plan horizontal; $b\mathrm{B}' = b\mathrm{B}$, etc.); on tire *a′b′*, *a′d′*, *a′e′*. Cela fait, on continue comme sur le plan horizontal : on achève le parallélogramme *a′b′c′d′* qui est la projection verticale de ABCD; on trace *e′f′* égale et parallèle à *a′b′*, *e′h′* égale et parallèle à *a′d′*, et on achève le parallélogramme *e′f′g′h′*; enfin on tire les lignes *b′f′*, *d′h′*, *c′g′* (qui doivent être égales et parallèles à *a′e′*), et on a la projection verticale *a′b′c′d′e′f′g′h′* du cube proposé.

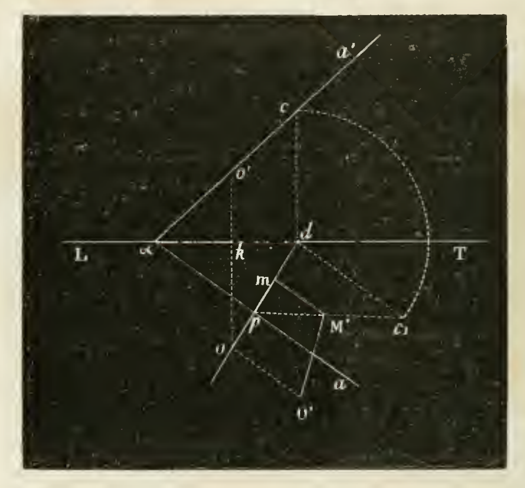
Vérifications. Il y a dans cette construction un assez grand nombre de vérifications. Par exemple, après avoir trouvé *c′*, *f′*, *g′*, comme nous l'avons dit, on peut vérifier si *cc′*, *ff′*, *gg′* sont perpendiculaires à la ligne de terre. Les quatre lignes *ae*, *bf*, *dh*, *cg* doivent être égales et parallèles; il en est de même de *a′e′*, *b′f′*, *d′h′*, *c′g′*; *a′e′* doit être perpendiculaire à PQ; etc.

Remarque. Nous avons fait dans la résolution de ce problème

une construction qu'il importe d'isoler et de mettre en relief; car elle se présente souvent.

80. Problème. *Élever sur un plan donné* a'αa *en un point donné* M *une perpendiculaire* MO *de longueur donnée.*

Soit m la projection horizontale donnée du point M. On abaisse mp perpendiculaire sur la trace horizontale αa du plan donné; on imagine le triangle rectangle Mmp, et on le rabat sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de son côté mp. On sait



que l'angle Mpm est l'angle du plan donné avec le plan horizontal (nº 53); on construit cet angle dpc_1, comme il est indiqué nº 51; puis on élève la perpendiculaire mM' à mp. Cela fait on mène M'O' perpendiculaire à pM' et on prend M'O' égale à la longueur donnée de la perpendiculaire MO; on projette le point O sur pm en o; o est la projection horizontale du point O de l'espace. On trouve la projection verticale o' en menant oko' perpendiculaire à LT, et prenant $ko' = oO'$.

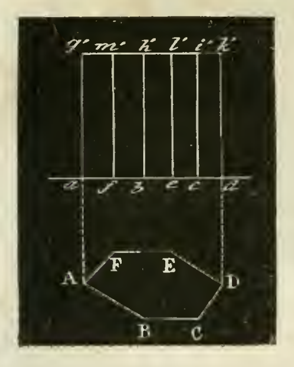
Nous avons déjà justifié cette construction. Le plan Mpm perpendiculaire à αa est perpendiculaire au plan donné et au plan horizontal; il contient donc la perpendiculaire MO élevée en M sur le plan $a'\alpha a$ et de plus la verticale Oo qui projette horizontalement le point O. MO, perpendiculaire au plan $a'\alpha a$, est perpendiculaire à l'hypoténuse Mp du triangle Mpm; Oo est perpendiculaire sur la

trace horizontale *Omp*, et toutes ces lignes forment la figure que nous avons rabattue sur le plan horizontal (O'M'*mpo*).

81. Projections d'un prisme droit. *Construire les projections d'un prisme droit dont la base repose sur le plan horizontal* ou *sur un plan quelconque* PQR.

1er cas. On donne la base ABCDEF et la grandeur de l'arête AG.

On sait en géométrie quels éléments d'un polygone il faut connaître pour pouvoir le construire; on mesure ces éléments sur le prisme. Par exemple, pour l'hexagone ABCDEF on mesure les côtés et trois diagonales.



On suit également la même marche que pour le parallélipipède. Les mesures prises ou données, on construit sur l'épure la base ABCDEF; on projette verticalement tous ses sommets en *a, f, b,*... sur LT. On élève en *a, f, b,*... des perpendiculaires *ag'*, *fm'*,... *dk'*, et on trace *g'k'*. Le prisme est projeté horizontalement sur ABCDEF, et verticalement *adk'g'*.

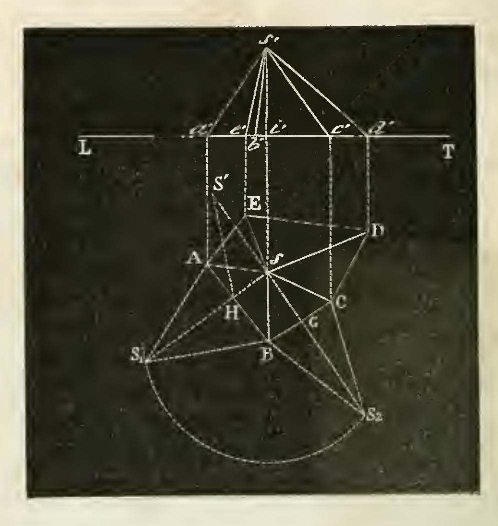
2e cas. Si la base est située sur un plan donné quelconque PQR, on doit connaître la position de cette base sur ce plan; on construit son rabattement horizontal, et on la relève en *abcdef*. Puis on construit la projection horizontale *ag* de l'arête AG comme on a construit celle de l'arête AE du cube (V. n° 79). Après cela, il n'y a plus qu'à construire un polygone *ghiklm* égal et parallèle à *abcdef* en partant du point *g* correspondant au point *a*, puis à joindre les sommets correspondants des deux polygones par des lignes égales et parallèles à *ag*, etc. On déduit la projection verticale de la projection horizontale comme on a fait pour le cube (n° 79).

82. Problème. *Construire les projections d'une pyramide* SABCDE.

1er cas. Le plus simple est de prendre, s'il est possible, le plan de la base pour plan horizontal de projection.

On mesure les éléments nécessaires pour construire la base ABCDE (les côtés, par exemple, et deux diagonales), puis trois arêtes SA, SB, SC. On construit la base ABCDE sur le plan hori-

zontal avec les éléments mesurés, puis on détermine les projections verticales a', b', c', ... e' de ses sommets A, B, C, D, E. Il ne reste plus qu'à déterminer les proportions du sommet S de la



pyramide. Pour cela, on construit sur AB un triangle AS_1B égal à la face ASB dont on connaît les trois côtés; puis sur BC un triangle S_2BC égal à la face SBC; S_1AB est le rabattement de la face SAB qui aurait tourné autour de AB comme axe; S_2BC est le rabattement de SBC qui aurait tourné autour de BC. Du premier rabattement S_1 de S abaissons la perpendiculaire S_1H sur l'axe AB; on sait (nº 53) que la projection horizontale du point S de l'espace est sur S_1H prolongée; abaissons de même S_2G perpendiculaire à BC, la projection horizontale de S est aussi sur S_2G prolongée; cette projection n'est donc autre que le point de rencontre s de S_1H et S_2G. Pour trouver la projection verticale, nous abaissons ss' perpendiculaire à la ligne de terre; nous savons que $i's'$ est égal à Ss de l'espace. Mais en vertu de la même proposition du nº 53, Ss est un côté de l'angle droit du triangle rectangle SHs dont nous connaissons l'hypoténuse $SH = S_1H$ et un côté Hs; on construit le triangle rectangle HsS' avec ces données, et on prend $i's' = s$S'. Connaissant les projections s, s', du sommet, on trace d'une part sA, sB,... sE, de l'autre, $s'a'$, $s'b'$, ... $s'e'$, et on a les deux projections sABCDE, $s'a'b'c'd'e'$ de la pyramide.

Remarque. Comme vérification, on peut mesurer une quatrième arête SD, construire le triangle $S_3CD = SCD$, et abaisser une perpendiculaire S_3F sur CD; S_3F prolongée doit passer au point s.

83. Remarque. La construction se simplifie quand la perpendiculaire Ss est extérieure à la pyramide. On peut se servir du fil à plomb pour obtenir le point s et la hauteur $Ss = i's'$; il n'y a plus qu'à joindre s et s' aux projections de même nom de la base ABCDE.

84. 2e cas. *La base* ABCDE *est située sur un plan donné quelconque* PQR.

On connaît la base ABCDE et sa position sur le plan PQR, et de plus les trois arêtes SA, SB, SC. Si on faisait sur la base ABCDE dans le plan PQR les constructions qui ont été faites sur le plan horizontal pour trouver le pied et la grandeur de la hauteur, on trouverait le pied O de la hauteur sur le plan PQR et sa grandeur SO. Or nous pouvons rabattre ABCDE sur le plan horizontal et effectuer sur le rabattement $A_1B_1C_1D_1E_1$ toutes les constructions dont nous venons de parler; il est évident qu'au lieu de O nous aurons son rabattement O_1 et la grandeur $O_1S'_1$ de SO. (Faites la figure.)

Construction. On construit le rabattement $A_1B_1C_1D_1E_1$ de la base ABCDE, puis les triangles $S_1A_1B_1$, $S_2B_1C_1$ avec les arêtes connues SA, SB, SO. On mène les perpendiculaires $S_1H_1O_1$, $S_2G_1O_1$, sur A_1B_1 et B_1C_1; puis on construit le triangle $H_1O_1S'_1$. Ayant trouvé $O_1S'_1 = SO$ et le rabattement O_1 du pied O de SO sur PQR, on relève la base en *abcde*, *a'b'c'd'e'*, puis le point O_1 en o; et il n'y a plus qu'à appliquer la méthode du n° 80 pour avoir les projections s, s' du sommet S de la pyramide. En effet, on connaît la projection o d'un point O du plan PQR, et la grandeur $SO = O_1S'_1$ d'une perpendiculaire SO menée à ce plan, il faut trouver les projections de son extrémité S. Ayant les projections s, s' du sommet S, on les joint aux projections de même nom des sommets de la base, et on a les projections *sabcde*, *s'a'b'c'd'e'* de la pyramide.

85. Problème. Construire les projections d'un polyèdre quelconque.

1er cas. *Une des faces* ABCDE *du polyèdre repose sur le plan horizontal.* (Faites une figure.)

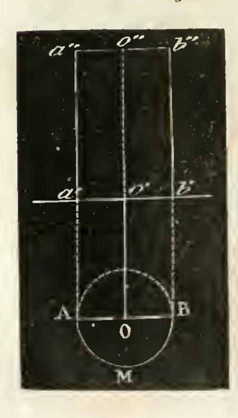
Ayant mesuré les éléments nécessaires, on construit cette base sur le plan horizontal, et on projette ses sommets en a', b', c', d', e' sur LT. Cela fait, on considère un sommet F du polyèdre situé

dans une face adjacente à ABCDE, sur une arête qui part de B par exemple. On mesure FA, FB, FC, et à l'aide de ces mesures on construit les projections f et f' de F, comme on a construit les projections s, s' du sommet s de la pyramide SABCDE, n° 83, 1er cas. On répète la même construction pour obtenir les projections de tous les sommets du polyèdre qui sont situés sur les faces adjacentes à ABCDE; il n'y aura pour cela que des mesures extérieures à prendre sur la surface même du polyèdre. Dès qu'on a déterminé les projections des extrémités d'une arête du polyèdre, on trace les projections de cette arête; on obtient ainsi les projections de toutes les faces adjacentes à ABCDE. On passe ensuite à des sommets situés sur une face adjacente à l'une de celles que forment des sommets déjà projetés. On connaît le plan de cette face déjà projetée, et on peut la rabattre sur le plan horizontal; pour déterminer chacun des sommets en question, on se trouve dans le deuxième cas du problème, relatif à la pyramide SABCDE (n° 84). On détermine chacun de ces sommets nouveaux du polyèdre en le considérant comme le sommet d'une pyramide dont la base est le polygone projeté en question. Et ainsi de suite de proche en proche.

Telle est la marche à suivre en général pour représenter un polyèdre par une épure; il y a naturellement des simplifications qui résultent des propriétés particulières de chaque figure. On peut prendre pour exemple le tronc de pyramide.

86. Projections d'un cylindre circulaire vertical ou incliné.

1er cas. *Le cylindre est vertical.*



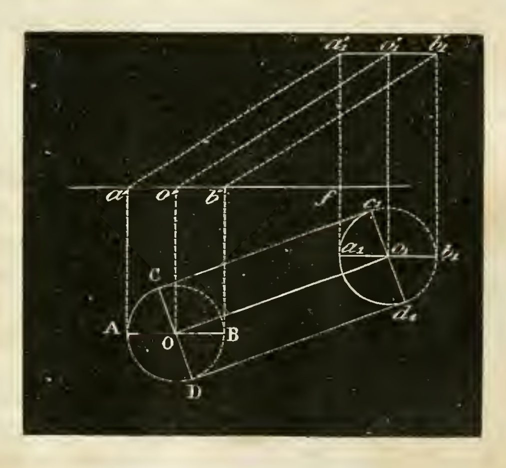
On prend pour plan horizontal de projection le plan de la base. On trace sur l'épure la circonférence de cette base, circ. AO; le cylindre se projette tout entier horizontalement sur cette circonférence. Pour le projeter verticalement, on mène le diamètre AOB parallèle à LT, et on projette les points A et B en a' et en b'; circ. AO se projette tout entière sur $a'o'b'$. On élève sur LT les perpendiculaires $a'a''$, $o'o''$, $b'b''$ égales à la hauteur mesurée du cylindre, et on trace $a''o''b''$. La figure $a'a''b''b'$ est la projection verticale du cylindre proposé.

On vérifie aisément qu'une génératrice quelconque du cylindre est projetée horizontalement en un point de la circ. AO, et verticalement sur une parallèle à *a'a''* située entre *a'a''* et *b'b''*. Un observateur, placé comme il a été dit n° 15, ne voit que le demi-cylindre qui repose sur la demi-circonférence *amb* marquée en trait plein.

87. 2e cas. *Le cylindre est incliné,* c'est-à-dire que ses génératrices sont inclinées sur le plan de sa base.

On prend toujours ce dernier plan pour plan horizontal de projection, et on construit cette base sur l'épure, soit en véritable grandeur, soit réduite à l'échelle, circ. AO. On connaît les projections d'une génératrice ou celles d'une ligne égale et parallèle comprise entre le plan de la base inférieure et celui de la base supérieure (nous considérons un cylindre limité par deux plans parallèles).

Pour déterminer la projection horizontale du cylindre, on mène par le centre O une ligne Oo_1 égale et parallèle à la projection horizontale donnée d'une génératrice; on décrit, de o_1, comme centre, une circonférence égale à circ. AO. On mène à circ. AO à et à circ. a_1o_1, deux tangentes parallèles à Oo_1 limitées aux points de contact C, c_1, D, d_1. On vérifie aisément que le cylindre se projette hori-



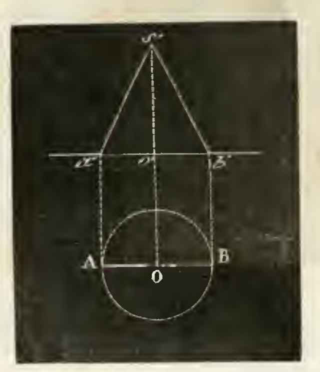
zontalement tout entier sur la figure actuellement construite; car une génératrice quelconque qui part d'un point de circ. AO pour

se terminer à un point de circ. A_1O_1 de l'espace, a évidemment sa projection horizontale comprise entre Cc_1 et Dd_1; or tout point de la surface du cylindre appartient à une génératrice. Pour construire la projection verticale, on projette d'abord verticalement circ. AO; pour cela ayant mené le diamètre AOB parallèle à LT, on le projette verticalement sur la ligne de terre en $a'b'$; circ. AO se projette en entier sur $a'o'b'$. On mène ensuite par a' et par b' deux parallèles $a'a'_1$, $b'b'_1$ égales et parallèles à la projection verticale donnée d'une génératrice, et on trace $a'_1o'_1b'_1$; le cylindre tout entier se projette verticalement sur le parallélogramme $a'a'_1b'b'_1$. En effet, on vérifie aisément qu'une génératrice quelconque (partant d'un point de circ. AO) se projette verticalement sur une parallèle à $a'a'_1$ et à $b'b'_1$, comprise entre ces deux lignes depuis $a'b'$ jusqu'à $a'_1b'_1$. Le cylindre est donc complétement représenté en projection verticale et en projection horizontale.

88. Remarque. Pour plus de simplicité, on peut prendre le plan vertical parallèle aux génératrices. On mesure une génératrice g du cylindre, puis sa hauteur H à l'aide d'un fil à plomb. Ayant tracé circ. AO et projeté AB en $a'b'$ sur LT, on construit un triangle rectangle $a'a'_1f$ ayant l'hypoténuse $a'a'_1 = g$ et le côté $a'_1f = \text{H}$. On prolonge $a'f$ jusqu'à la rencontre en a_1 de AB prolongé; $a'a'_1$ et Aa_1 sont les projections d'une génératrice du cylindre. On continue comme dans le cas précédent. (Faites l'épure.)

89. Projection d'un cône circulaire droit.

On prend le plan de la base pour plan horizontal.



La hauteur peut se déterminer à l'aide d'un fil à plomb, ou se déduire de l'arête mesurée et du rayon de la base. On décrit sur l'épure la circonférence de cette base, circ. AO. Le sommet S du cône se projette horizontalement au centre O, et le cône tout entier se projette sur le cercle AO; car on obtient la projection horizontale d'une génératrice quelconque en joignant le centre O à un point de la circonférence. Pour obtenir la

projection verticale, on trace le diamètre AOB parallèle à la ligne de terre; puis on projette verticalement A et B en a' et en b'. On mène $Oo's'$ perpendiculaire à LT, et on prend $o's'$ égale à la hauteur du cône; s' est la projection verticale du sommet. On trace $s'a'$, $s'b'$; $s'a'b'$ est la projection verticale de la surface conique; en effet, chaque génératrice du cône qui a sa trace horizontale sur circ. AO, se projette verticalement entre $s'a'$ et $s'b'$.

90. Projection d'un cône circulaire oblique (faites la figure).

On prend le plan de la base pour plan horizontal de projection, et le plan vertical parallèle à une des arêtes SA que l'on mesure; on détermine en même temps la hauteur Ss à l'aide du fil à plomb. Cela fait, on trace sur l'épure la circonférence de la base, circ. AO, et on mène le diamètre AOB parallèle à la ligne de terre; puis on projette verticalement le point A en a'. On construit au-dessus de LT (du côté de AOB) un triangle rectangle $s'a'f'$ ayant pour hypoténuse la longueur de l'arête SA et pour côté opposé à $a's'f'$ = la hauteur du cône. On prolonge $s'f'$ au-dessous de LT jusqu'à la rencontre de AOB prolongée s; s est la projection horizontale du sommet. On projette verticalement le point B en b'; on trace $s'b'$; on mène de s deux tangentes sc, sd à circ. AO. Toutes ces constructions faites, on a sur l'épure les deux projections du cône oblique SAB.

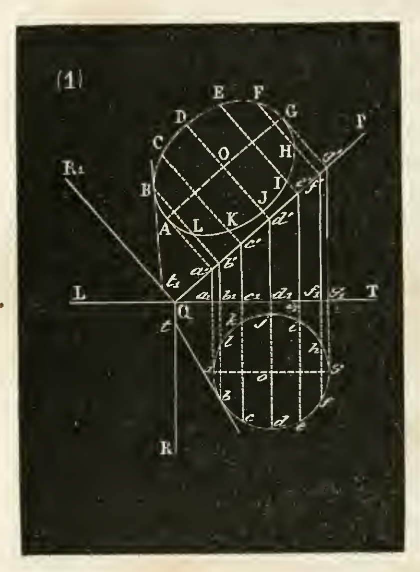
91. Problème. *Construire l'intersection d'un cylindre circulaire droit par un plan* PQR *incliné à sa base, et le développement de la surface du cylindre tronqué.*

On prend pour plan horizontal le plan de la base du cylindre, et le plan vertical perpendiculaire au plan sécant PQR. Dans ces conditions la trace horizontale QR doit être perpendiculaire à la ligne de terre (nº 31) et la trace verticale PQ doit faire avec cette même ligne un angle PQT égal à l'inclinaison du plan sécant sur le plan horizontal.

Ayant déterminé le rayon de la base du cylindre, on décrit cette circonférence sur le plan horizontal; circ. ao. La courbe d'intersection du plan PQR et de la surface cylindrique est projetée horizontalement sur circ. ao comme toutes les lignes tracées sur le cylindre, et verticalement sur PQ comme toutes les lignes tracées

sur le plan PQR (n° 32). Pour obtenir en particulier les projections d'un point de cette intersection, il suffit de mener une perpendiculaire à la ligne de terre allant d'un point de circ. *ao* à la droite PQ. (Ex. *b*, *b'*).

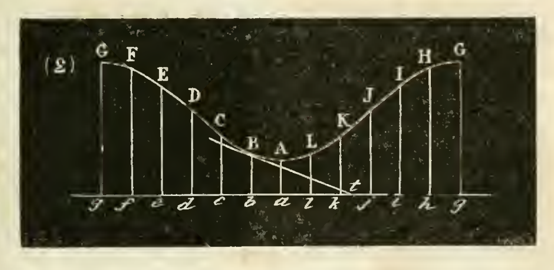
Pour construire cette intersection en véritable grandeur, on rabat le plan PQR sur le plan vertical en le faisant tourner autour de sa trace PQ. Le point A de la courbe, projeté en *a* et en *a'*, est situé sur une perpendiculaire *a'*A au plan vertical $= a_1 a$; cette ligne *a'*A située dans le plan PQR est perpendiculaire à PQ et se rabat sur une perpendiculaire *a'*A que nous prenons égale à $a_1 a$. Le point B projeté en *b*,*b'* se rabat de même sur une perpendiculaire $b'\mathrm{B} = b_1 b$, etc. (V. la fig.). A l'exception du point *a'* et du point *g'*, chaque point de *a'g'* est la projection verticale de deux points de l'intersection; par exemple *b'* est la projection commune de deux points B et L situés sur la même perpendiculaire *b'*LB au plan vertical et projetés horizontalement en *b* et en *l*. On prend donc sur le rabattement *b'*B une longueur $b'\mathrm{B} = b_1 b$ et une autre $b'\mathrm{L} = b_1 l$; ce qui donne deux points de la courbe cherchée. On fait la même construction pour un certain nombre de points assez rapprochés, et on joint les points obtenus A, B, C,... par une ligne continue. Les lignes *lb*, *kc*, etc., étant divisées en deux parties égales par le diamètre *ag*, les lignes correspondantes LB, KC, etc., du rabattement sont divisées en deux parties égales par AG rabattement de AG de l'espace; AG parallèle à PQ est un axe de la courbe que nous construisons. Cette courbe est une ellipse dont le centre est O et le grand axe AG.



Le cylindre tronqué *abglka*ABGLKA peut être développé sur un

plan. Ce développement étant utile dans les applications, nous allons l'effectuer : pour cela imaginons qu'on ouvre le cylindre suivant l'arête gG pour le rabattre sur un plan vertical qui aurait pour trace horizontale ag prolongée à droite; la circonférence $gealhg$ se déroule et se rabat en ligne droite sur ce prolongement même de ag. On divise cette circonférence en un grand nombre de parties égales; nous la subdiviserons en 12 parties seulement pour ne pas charger la figure de constructions.

Cela fait, pour construire le développement on trace une droite gag égale à la circonférence développée en ligne droite (*fig.* 2) ($gag = 2\pi.ao$, à peu près les 22 septièmes de ao). On divise cette ligne en 12 parties égales, gj, fe, etc. En chaque point de division



on élève une perpendiculaire à gag ; sur la première, gG, on prend une longueur égale à gG de l'espace, c'est-à-dire à g_1g', puisque $g_1g' = g$G (n° 8); on prend de même $f\text{F} = f_1f'$, etc. Arrivé à $a\text{A} = a_1a'$, on continue en prenant les mêmes hauteurs verticales, mais dans un ordre inverse $b\text{L} = b\text{B} = b_1b'$; $c\text{C} = k\text{K} = \text{K}_1\text{K}'$, etc. En effet, les points B et L, par exemple, sont, comme nous l'avons déjà dit, sur une même droite b'LB perpendiculaire au plan vertical, et par suite *parallèle* au plan horizontal; c'est pourquoi $b\text{B} = l\text{L} = b_1b'$.

92. Tangentes. Il est bon de construire des tangentes en certains points du rabattement et du développement de la courbe d'intersection; on opère pour cela comme nous allons le faire pour construire la tangente en B. Cette tangente a pour projection horizontale une tangente menée au cercle en b (*fig.* 1); on prolonge cette tangente jusqu'à sa rencontre en t avec la trace QR ; t est le point où la tangente en question (située dans le plan PQR) vient rencontrer le plan horizontal. Pour avoir le rabattement de cette tangente sur

le plan vertical, on observe que ce rabattement passe en B, rabattement du point B de l'espace ; il suffit donc de trouver d'ailleurs le rabattement de t. Or la ligne QR, perpendiculaire à PQ se rabat sur une perpendiculaire QR_1 menée au point Q à cette ligne sur le plan vertical ; on prend $Qt_1 = Qt$ et t_1 est le rabattement de t. En traçant t_1B on a le rabattement de la tangente Bt de l'espace sur le plan vertical.

Pour construire la tangente au développement de la courbe au point B, on observe que la tangente étant le prolongement d'un élément de la courbe, se rabat avec celle-ci sur le plan du développement ; elle est encore sur ce plan le prolongement d'un élément de la courbe ouverte, c'est-à-dire une tangente à cette courbe.

Dans l'espace (au-dessus de la base du cylindre (*fig.* 1), la tangente Bt, la verticale projetante Bb, et la ligne bt de l'épure forment un triangle rectangle dont nous connaissons deux côtés bB $= b_1b'$ et bt. Les deux côtés bB, bt de ce triangle, situés dans un plan vertical Bbt, se placent sans changer de grandeur sur le développement ; la génératrice bB est déjà marquée (*fig.* 2) ; la tangente bt se confond avec la circonférence développée en ligne droite sur gag ; elle commence en b et on trouve son extrémité t en prenant bt_2 égale à bt de la projection ; on joint B à t_2 ; Bt_2 est la position que prend la tangente Bt dans le développement ; c'est la tangente à la courbe développée.

93. Nous avons considéré tous les corps déjà étudiés dans les derniers livres de la géométrie ordinaire, et indiqués dans le programme ; nous allons nous occuper des édifices, des instruments et des machines.

REPRÉSENTATION DES ÉDIFICES, DES MACHINES, DES INSTRUMENTS, ET EN GÉNÉRAL DES OUVRAGES D'ART ET DE PRÉCISION.

Plan, coupe, élévation.

94. Un édifice ou une machine se représente de la même manière que les corps précédents ; mais pour que la description en soit suffisamment claire et complète, il faut généralement plus de deux projections. Ces projections, quel qu'en soit le nombre, se

font toujours sur des plans horizontaux (parallèles entre eux), et sur des plans verticaux perpendiculaires aux premiers, mais ayant d'ailleurs des directions quelconques (n° 76). On les distingue par les noms suivants.

Plan. Le *plan géométral* ou simplement le *plan* d'un édifice, d'une machine, d'un ouvrage d'art quelconque, est sa projection sur un plan horizontal extérieur, c'est-à-dire qui laisse du même côté tout l'objet représenté.

Élévation. La projection sur un plan vertical également extérieur s'appelle élévation.

Coupe. On appelle *coupe*, une projection faite sur un plan qui traverse l'édifice ou la machine en face de certaines lignes, de certaines parties intérieures que l'on veut spécialement représenter.

95. Ces diverses projections se construisent séparément. On commence par se rendre compte des lignes, des contours et en général de tous les détails qui doivent être représentés. Puis on choisit les plans de projection de manière que chacun de ces contours, de ces détails se trouve *distinctement* représenté sur un des dessins au moins, de manière que l'on y voie sa forme, ses dimensions, sa situation et même sa destination dans l'ensemble; c'est-à-dire que chaque détail important doit être projeté autant que possible sur un plan parallèle à ses lignes principales.

96. On doit s'attacher à éviter toute confusion, toute surcharge. Pour cela, on représente sur chaque plan d'abord les lignes parallèles les plus voisines; puis, parmi les plus éloignées, celles qui peuvent être projetées sans confusion avec les premières. Dès que la confusion est à craindre, on réserve les parties plus éloignées pour les représenter ensuite sur d'autres plans parallèles choisis dans leur voisinage immédiat.

Ex. : Les plans du rez-de-chaussée et des divers étages d'une maison.

Deux ou trois exemples choisis feront mieux comprendre ces explications générales.

REPRÉSENTATION D'UNE MAISON ORDINAIRE A DEUX ÉTAGES.

Plan géométral, élévation, coupe.

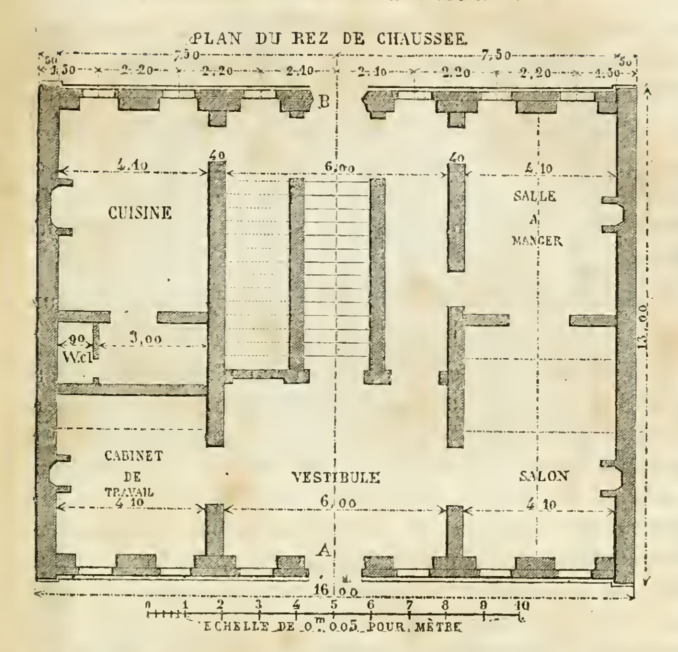
97. PLAN GÉOMÉTRAL. Le dessin doit faire connaître, non-seulement la configuration extérieure de la maison, mais encore sa distribution intérieure au rez-de-chaussée et aux divers étages, l'épaisseur des murs, etc., en un mot tous les détails nécessaires pour une description complète de la maison ou pour sa construction.

Le plan du rez-de-chaussée et celui du premier étage ne peuvent être faits ensemble sur le même dessin : ces deux projections se confondraient évidemment de manière à ne pouvoir être distinguées ni l'une ni l'autre. On choisit donc deux plans de projection différents, l'un au niveau du rez-de-chaussée, l'autre au niveau du premier étage (n° 96). La seconde projection devrait à la rigueur s'appeler une coupe horizontale; on l'appelle néanmoins par analogie PLAN *du premier étage.*

L'ÉCHELLE DE RÉDUCTION est la même pour les quatre plans.

PLAN DU REZ-DE-CHAUSSÉE. Le plan de projection est au niveau du rez-de-chaussée. Ayant mesuré le contour extérieur des murs, on dessine ce contour sur le papier à l'échelle adoptée qui est $0^m,005$ pour mètre. On lève ensuite le plan du rez-de-chaussée à l'intérieur; c'est un levé au mètre qui se fait avec ordre comme nous l'avons expliqué en détail dans le levé des plans (n° 83).

Notre figure s'explique d'elle-même. On suit, on relève, et on rapporte sur le dessin les lignes dessinées sur le sol par les murs et les cloisons, en ayant soin de marquer les ouvertures des portes, les ouvertures et les embrasures des croisées, le creux et le relief de chaque cheminée, et enfin les projections horizontales des marches de l'escalier qui est droit, composé de deux parties séparées par un mur et par un palier à mi-hauteur de chaque étage. On a indiqué par des cotes les dimensions de chaque pièce, l'épaisseur de chaque mur, la largeur entre deux fenêtres, la



PLAN DU PREMIER ETAGE

CHAMBRE

CHAMBRE

Wcl

ANTICHAMBRE

CABINET

CHAMBRE

CHAMBRE

CHAMBRE

longueur et la largeur extérieures de la maison. Enfin on a marqué toutes les cotes hors œuvre et dans œuvre nécessaires pour la construction ou utiles pour indiquer l'étendue de chaque pièce (*).

PLAN DU PREMIER ÉTAGE. Le plan du premier étage se lève de la même manière (V. la 1re partie, n° 83). On n'a mis que les cotes particulières à ce plan. Celles qui lui sont nécessairement communes avec le plan du rez-de-chaussée n'ont pas besoin d'être indiquées.

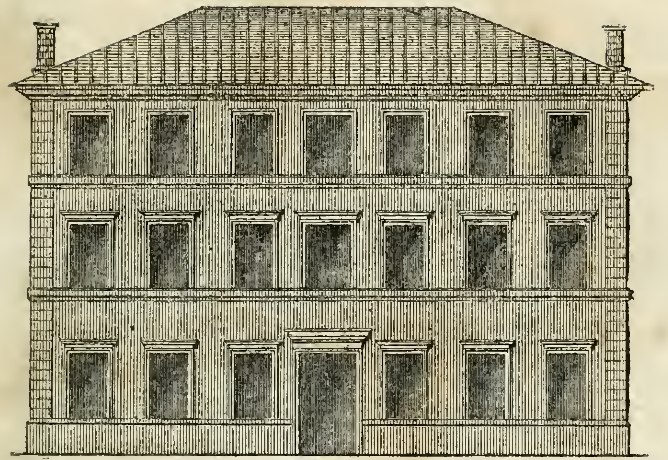
DEUXIÈME ÉTAGE. La distribution du second étage étant la même que celle du premier, le même plan géométral sert pour les deux.

ÉLÉVATION. C'est une projection sur un plan vertical extérieur parallèle à la façade antérieure de la maison. Ce plan peut recevoir sans confusion la projection du contour complet de cette façade, des lignes qui y font saillie, des fenêtres et de leur fronton, des lignes et des arêtes de la toiture que l'on voit de face, le côté antérieur des cheminées. On peut y coter ou mesurer la hauteur de chaque étage à l'extérieur, celle de la porte, des fenêtres, etc., en un mot, toutes les cotes de hauteur, et les longueurs des lignes qui ne sont vues en véritable grandeur que sur cette projection. Exemple : les arêtes du toit, la longueur de la corniche, etc.

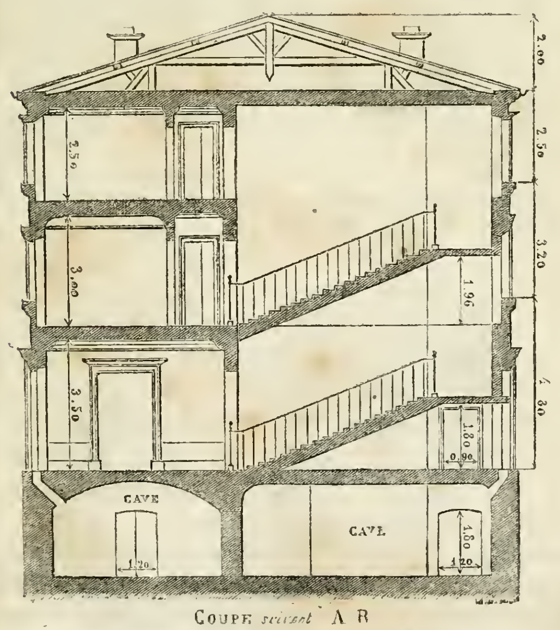
COUPE. On a fait une coupe pour indiquer la disposition des escaliers, la hauteur des marches, la balustrade, la distance d'un palier à l'autre, la hauteur des pièces de chaque étage, les portes d'entrée principales de chaque appartement; la disposition de la charpente vers les combles. Cette coupe a été prolongée jusqu'au sol des caves dont elle indique les entrées principales. Elle est faite suivant l'horizontale AB du rez-de-chaussée ou du premier étage, c'est-à-dire que c'est une projection faite sur un plan vertical passant par cette ligne AB.

Tous les détails projetés sont situés à gauche de ce plan vertical, en entrant dans la maison. En général, on ne doit projeter sur un plan quelconque que des lignes toutes situées du même côté de ce plan.

(*) Chaque longueur se mesure entre deux flèches dont les ouvertures se regardent.



ELEVATION



COUPE suivant A B

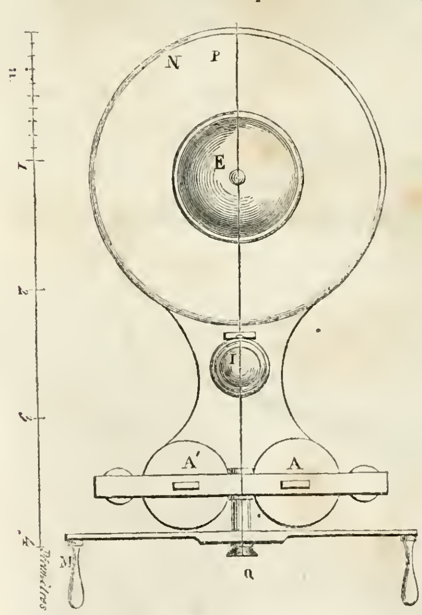
Quand une maison a plusieurs façades qui ne se ressemblent pas, on fait une *élévation* pour chacune comme si elle était seule, de même qu'on fait au besoin un plan pour chaque étage. Chaque projection se fait sur un plan extérieur à la maison, placé vis-à-vis et parallèlement à la façade considérée (nos 94 et 95).

PLAN D'UNE MACHINE OU D'UN INSTRUMENT.

98. Machine pneumatique. Nous avons choisi cette machine, que la plupart de nos lecteurs connaissent, afin que nos explications soient plus faciles à suivre et surtout à généraliser.

Nous avons construit le plan géométral, une élévation suivant AA' et une coupe suivant PQ.

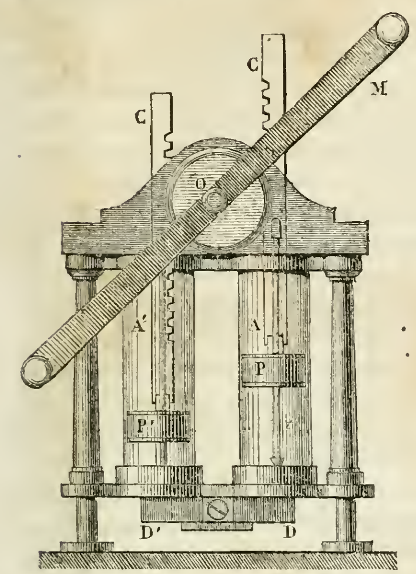
L'échelle est la même pour les trois figures.



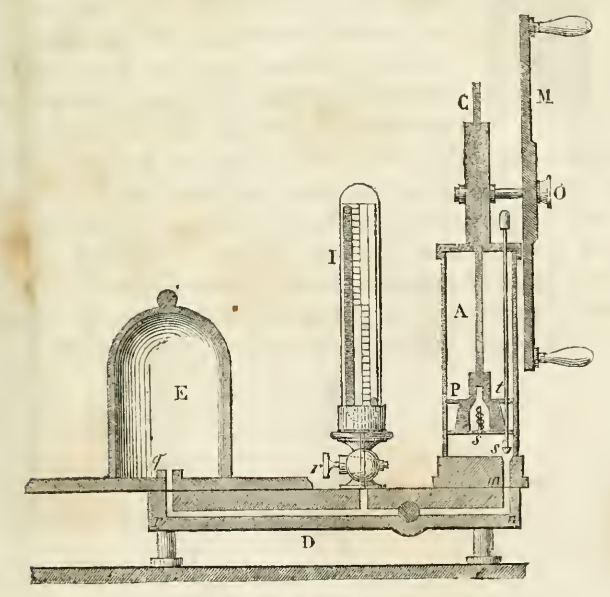
Plan géométral (*fig.* 1). Le plan géométral reçoit les projections horizontales de la platine N, du récipient E, de l'ouverture du canal de communication qui a la direction PQ, de l'éprouvette I, des corps de pompe A et A', des colonnes d'appui et de la manivelle M. Chaque pièce cylindrique est représentée par une circonférence que l'on trace et que l'on dispose d'après les mesures prises sur la machine elle-même. La figure montre clairement quelles sont les mesures à prendre (*contours* et *longueurs*).

Élévation (*fig.* 2). Le plan de projection perpendiculaire à PQ traverse la barre de la manivelle en face des corps de pompe. On a représenté sans confusion, après en avoir mesuré les dimensions

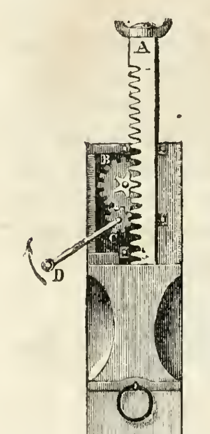
et les contours, la barre de la manivelle M, ses axes, le fronton, les tiges à crémaillère C, C, les corps de pompe A, A', les colonnes d'appui, le plan qui les supporte, etc.; à l'intérieur, les pistons P et P', les prolongements des tiges à crémaillère et la tige de la soupape conique; en un mot, on a représenté tous les détails visibles de ce côté, dont la connaissance est utile soit pour donner une idée de la machine et de ses usages, soit pour sa construction.



Coupe (suivant PQ) (*fig*. 3). Cette projection, faite sur un plan



vertical qui passe par la direction du canal de communication, a pour objet de faire connaître la forme, la disposition, et la grandeur de certaines parties ou de certains détails essentiels qui ne se voient pas sur les deux autres projections : notamment la soupape S du piston et la cavité dans laquelle elle joue, le canal de communication D et ses ouvertures sous cloche, sous l'éprouvette, et dans le corps de pompe (sous la soupape conique) l'éprouvette I, avec la graduation du baromètre tronqué, le robinet r qui la met en communication avec le récipient. Tous ces détails, situés du même côté de PQ (à droite ou à gauche), sont représentés avec précision, d'après des mesures prises d'avance.



Cric. Nous donnons la coupe verticale d'un cric. Cette *seule* projection suffit pour donner une idée de cette machine, du jeu et de l'utilité de ses diverses pièces.

Remarque. Ces divers dessins, plans, coupe et élévation ne sont pas indépendants ; ils se complètent et se correspondent, comme la projection verticale et la projection horizontale d'une figure quelconque, pour faire connaître les positions relatives des différentes parties de l'objet représenté en même temps que leur forme. Nous avons défini cette correspondance en disant *coupe suivant* AB, *suivant* PQ.

Nous n'irons pas plus loin. Ces explications, jointes à celles du n° 83, 1re partie, nous paraissent suffisantes pour donner une idée de la manière de représenter les ouvrages d'art et d'architecture par coupe, plan et élévation. Le lecteur, mis sur la voie, fera bien de s'exercer à lever des plans, à faire des projets ; nous l'engageons à représenter les principaux instruments de physique comme nous avons représenté la machine pneumatique.

FIN.

TABLE GÉNÉRALE DES MATIÈRES.

LEVÉ DES PLANS.

NOTIONS SUR L'ARPENTAGE.

NIVELLEMENT.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

FIN DE LA TABLE.

Paris. — Imprimé par E. Thunot et Cᵉ, 26, rue Racine.

14	15	16
Passage en Bateau.	Gué à Cheval	Gué à Pied

LANDES

TEINTES ET SIGNES CONVENTIONNELS.

1 Pont de Pierre — 2 Pont-Levis — 3 Pont en Bois — 4 Pont en Fer — 5 Pont de Bateaux — 6 Pont tournant — 7 Pont suspendu *pour piétons* — 8 Pont suspendu *pour voitures* — 9 Pont Volant — 10 Bac — 11 Bac à Traille — 12 Barrage — 13 Rivière *Navigable Flottable* — 14 Passage en Bateau — 15 Gué à Cheval — 16 Gué à Pied

TERRES — TERRES LABOURÉES — SABLES — DUNES — FRICHES — LANDES

BRUYÈRES — PRÉS — BROUSSAILLES — BOIS — VIGNES — JARDINS

ROCHERS — TOURBIÈRES — MARAIS — MARAIS SALANS — RIVIÈRES — MERS

Route Impériale
Route Départementale
Chemin de Fer
Chemin Vicinal
Chemin

Ville maritime
Port
Phare
Bourg
Rade
Montagne
Ruisseau
Falaises
Rocher
Fleuve
Bouche de Fleuve

17 Ville — 18 Église — 19 Maison — 20 Front de Fortification — 21 Fort — 22 Batterie et Parallèles — 23 Rizière — 24 Saline — 25 Moulin *à Eau* — 26 Moulin *à Vent* — 27 Tour — 28 Chapelle — 29 Télégraphe — 30 Forge Scierie — 31 Verrerie — 32 Routes et Chemins — 33 Écluse Canal, Digue — 34 Rochers sur la Côte — 35 Île Banc de Sable — 36 Mer Rivière Montagne

Paris. — Imprimé par E. THUNOT et Ce, rue Racine, 26, près de l'Odéon.